

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 25. (4 Punkte). Die Addition für natürliche Zahlen ist definiert durch

$$n + 0 := n, \quad n + Sm := S(n + m).$$

Beweisen Sie informal daß $+$ kommutativ ist. Hinweis. Induktion nach m . Man braucht einige Hilfsaussagen über $+$, die auch zu beweisen sind.

Aufgabe 26. (4 Punkte). (Logik für entscheidbare Prädikate). Es seien p, q Variablen vom „Grundtyp“ $\mathbb{B}$ der booleschen Objekte, bestehend aus $\mathbf{tt}$ (wahr) und $\mathbf{ff}$ (falsch). Terme haben jetzt Typen, die aus Grundtypen mit $\rightarrow_{\text{Typ}}$ (kurz: $\rightarrow$) aufgebaut sind. Einziges Prädikatsymbol ist atom der Stelligkeit ($\mathbb{B}$). Atomare Formeln sind $\text{atom}(t)$ (kurz: t) mit t Term vom Typ $\mathbb{B}$. Außer den „Konstruktoren“ $\mathbf{tt}$, $\mathbf{ff}$ betrachten wir Funktionssymbole („Programmkonstanten“), hier nur $=_{\mathbb{B}}$ (kurz: $=$) vom Typ $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ mit den Berechnungsregeln

$$(\mathbf{tt} = \mathbf{tt}) := \mathbf{tt}, \quad (\mathbf{tt} = \mathbf{ff}) := \mathbf{ff}, \quad (\mathbf{ff} = \mathbf{tt}) := \mathbf{ff}, \quad (\mathbf{ff} = \mathbf{ff}) := \mathbf{tt}.$$

Berechnungsregeln sind zu lesen als Ersetzungsregeln (von links nach rechts). Zwei Terme heißen gleich wenn sie ein gemeinsames „Redukt“ haben. Sei $\mathbf{F} := (\mathbf{ff} = \mathbf{tt})$. Beweisen Sie, daß $\mathbf{F} \rightarrow \forall_{p,q} (p = q)$ herleitbar ist aus Axiomen

$$\text{CaseDist: } A(\mathbf{tt}) \rightarrow A(\mathbf{ff}) \rightarrow \forall_p A(p).$$

Aufgabe 27. (4 Punkte). Geben Sie Programme an für

$x = \min(y, z)$ schreibt das Minimum von y, z in das Register x ,

$x = y \bmod 2$ schreibt den Rest der Division von y durch 2 in x .

Verwenden Sie dabei *ausschließlich* die Basisinstruktionen

Zero: $x := 0$,

Succ: $x := x + 1$,

Jump: **[if $x = y$ then I_n else I_m]**.

Aufgabe 28. (4 Punkte). Formalisieren Sie den Beweis aus Aufgabe 25 (siehe ueb07.scm).

Abgabe. Mittwoch, 3. Dezember 2025 um 8:00, über Uni2work.