

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 21. (4 Punkte). Zeigen Sie jeweils durch Angabe einer Herleitung

- (a) $\vdash_c ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (Peirce Formel).
- (b) $\vdash (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow B$ (Mints Formel).

Aufgabe 22. (4 Punkte). Beweisen Sie $\not\vdash_i ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$. Hinweis. Sie können dazu das in der Vorlesung zum Beweis von $\not\vdash_i \neg\neg P \rightarrow P$ angegebene Baummodell verwenden.

Aufgabe 23. (4 Punkte). Es seien $\mathcal{T}$ ein Baummodell, $t, r(x)$ Terme, $A(x)$ eine Formel und η eine Belegung in $|\mathcal{T}|$. Beweisen Sie:

- (a) $\eta(r(t)) = \eta_x^{\eta(t)}(r(x))$.
- (b) $\mathcal{T}, k \Vdash A(t)[\eta]$ genau dann, wenn $\mathcal{T}, k \Vdash A(x)[\eta_x^{\eta(t)}]$.

Hinweis: Induktion über Terme bzw. Formeln.

Aufgabe 24. (4 Punkte).

- (i) Formalisieren Sie in Minlog die Herleitungen aus Aufgabe 21 von Hand (d.h. in einzelnen Schritten). Berechnen Sie jeweils den zugehörigen Herleitungsterm durch Ausführen von

`(proof-to-expr-with-formulas)`

nach Abschluß des Beweises (siehe `ueb06.scm`).

- (ii) Erzeugen Sie Herleitungen der Formeln aus Aufgabe 21 automatisch, d.h. durch Anwendung von `(prop)`.
- (iii) Geben Sie die Normalform der durch `(prop)` gefundenen Herleitung der Mints Formel an.

Abgabe. Mittwoch, 26. November 2025 um 8:00, über Uni2work.