

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 13. (4 Punkte). Zeigen Sie jeweils durch Angabe einer Herleitung

- (a) $(A \tilde{\vee} B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow C$,
- (b) $(A \tilde{\vee} B \rightarrow C) \rightarrow B \rightarrow C$,
- (c) $(\neg\neg C \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \tilde{\vee} (B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$.

Aufgabe 14. (2 Punkte).

Eine Herleitung von $(\neg\neg B \rightarrow B) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow B$ ist

$$\begin{array}{c}
 \frac{u_1: \neg B \quad \frac{u_2: A \rightarrow B \quad w: A}{B}}{\neg(A \rightarrow B)} \rightarrow^+ u_2 \\
 \frac{v: \neg\neg(A \rightarrow B) \quad \neg(A \rightarrow B)}{\perp} \rightarrow^+ u_1 \\
 \frac{u: \neg\neg B \rightarrow B \quad \perp}{B}
 \end{array}$$

wobei die Anwendungen von $\rightarrow^+$ am Ende weggelassen sind. Geben Sie den zugehörigen Herleitungsterm an.

Aufgabe 15. (6 Punkte). Die Relation $\succ_1$ heißt *konfluent* (oder Church-Rosser, CR) wenn aus $M \succ_1 M'$ und $M \succ_1 M''$ die Existenz eines N mit $M' \succ_1 N$ und $M'' \succ_1 N$ folgt. $\succ_1$ heißt *schwach konfluent* (oder weak Church-Rosser, WCR) wenn aus $M \succ_1 M'$ und $M \succ_1 M''$ die Existenz eines N mit $M' \succeq N$ und $M'' \succeq N$ folgt. Zeigen Sie

- (a) Die Normalform eines stark normalisierenden M ist eindeutig bestimmt.
- (b) Wenn alle M stark normalisierend sind, so ist $\succeq$ konfluent.

Hinweis. M heiße *gut* wenn aus $M \succ_1 K$ und $M \succ_1 L$ die Existenz eines N folgt mit $K \succ_1 N$ und $L \succ_1 N$. Beweisen Sie, daß jedes stark normalisierende M gut ist. Verwenden Sie dazu transfinite Induktion über die fundierte partielle Ordnung $\prec$, also das Schema

$$\forall_{M \in \mathcal{T}} (\forall_{M' \prec M} P(M') \rightarrow P(M)) \rightarrow \forall_{M \in \mathcal{T}} P(M).$$

Aufgabe 16. (4 Punkte).

- (a) Formalisieren Sie die Herleitungen aus Aufgabe 13 in Minlog.
- (b) Formalisieren Sie die Herleitung aus Aufgabe 14 in Minlog. Berechnen Sie den zugehörigen Herleitungsterm durch Ausführen von

(proof-to-expr-with-formulas)

nach Abschluß des Beweises.

(siehe ueb04.scm).

Abgabe. Mittwoch, 12. November 2025 um 8:00 über Uni2work.