Mathematisches Institut der LMU — Wintersemester 2024/25
Helmut Schwichtenberg — ueb12

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 45. (4 Punkte). Es sei T eine Theorie wie in Abschnitt 3.2 der Vorlesung.

(a) Beweisen Sie: sind $M, N \subseteq \mathbb{N}$ repräsentierbar in T, so auch $M \cap N$.
(b) Es seien $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in T repräsentierbar durch die Formeln $A(x, y)$ bzw. $B(y, z)$. Beweisen Sie, daß dann auch $g \circ f$ in T repräsentierbar ist.

Aufgabe 46. (4 Punkte). Es sei T eine Theorie wie in Abschnitt 3.2 der Vorlesung. Eine geschlossene Formel G heißt Gödelsatz wenn

$$T \vdash G \leftrightarrow \neg P(\underline{\ulcorner G \urcorner}) \qquad \text{wobei } P(x) := \exists_y B_{\mathrm{Prf}_T}(y, x).$$

(a) Beweisen Sie, daß es einen Gödelsatz gibt.
(b) Es sei G ein Gödelsatz. Wir nehmen zusätzlich an, daß (i) für alle geschlossenen Formeln A gilt: wenn $T \vdash A$, so auch $T \vdash P(\underline{\ulcorner A \urcorner})$, und (ii) $T \nvdash \bot$. Beweisen Sie $T \nvdash G$.

Aufgabe 47. (4 Punkte). Ordinalzahl-Bezeichnungen (kurz: Oz) α, β, γ und eine Relation $<$ zwischen ihnen seien simultan definiert durch

(i) Sind $\alpha_m, \dots, \alpha_0$ Ozn, $m \geq -1$ und $\alpha_m \geq \cdots \geq \alpha_0$ (wobei $\alpha \geq \beta$ meint $\alpha > \beta$ oder $\alpha = \beta$), so ist $\omega^{\alpha_m} + \cdots + \omega^{\alpha_0}$ eine Oz.
(ii) Seien $\alpha := \omega^{\alpha_m} + \cdots + \omega^{\alpha_0}$ und $\beta := \omega^{\beta_n} + \cdots + \omega^{\beta_0}$ Ozn. Wir definieren $\alpha < \beta$ gdw es ein $i \geq 0$ gibt so daß $\alpha_{m-i} < \beta_{n-i}$, …, $\alpha_m = \beta_n$, oder $m < n$ und $\alpha_m = \beta_n$, …, $\alpha_0 = \beta_{n-m}$.

Beweisen Sie

(a) $\alpha < \beta \to \beta < \gamma \to \alpha < \gamma$,
(b) $\alpha < \beta \lor \alpha = \beta \lor \beta < \alpha$.

Hinweis: Induktion über die Stufe $\mathrm{lev}(\alpha)$ von Ordinalzahlen, definiert durch $\mathrm{lev}(0) := 0$, $\mathrm{lev}(\omega^{\alpha_m} + \cdots + \omega^{\alpha_0}) := \mathrm{lev}(\alpha_m) + 1$. (0 ist die leere Summe).

Aufgabe 48. (4 Punkte). Die Addition $+$ von Ozn sei definiert durch

$$(\omega^{\alpha_m} + \cdots + \omega^{\alpha_0}) + (\omega^{\beta_n} + \cdots + \omega^{\beta_0}) := \omega^{\alpha_m} + \cdots + \omega^{\alpha_i} + \omega^{\beta_n} + \cdots + \omega^{\beta_0},$$

i minimal mit $\beta_n \leq \alpha_i$. Beweisen Sie

(a) $+$ ist assoziativ,
(b) $+$ ist strikt monoton im zweiten Argument,
(c) $+$ ist schwach monoton im ersten Argument.

Abgabe. Mittwoch, 22. Januar 2025 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.