Mathematisches Institut der LMU
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2024/25
ueb11

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 41. (4 Punkte). Beweisen Sie, daß für alle $a = \langle n_0, \dots, n_{k-1} \rangle$ gilt
(a) $\mathrm{lh}(a) = k$,
(b) $(a)_i = n_i$ für alle $i < k$.

Aufgabe 42. (4 Punkte). Es sei $\mathcal{L}$ die durch die Funktionssymbole 0 (nullstellig) und S (einstellig) und das Relationssymbol $=$ (zweistellig) gegebene Sprache. Für $k \in \mathbb{N}$ ist das Numeral $\underline{k} \in \mathrm{Ter}_{\mathcal{L}}$ definiert durch $\underline{0} := 0$ und $\underline{k+1} := S\underline{k}$. Definieren Sie eine elementare Funktion s so daß für jede $\mathcal{L}$-Formel $C = C(z)$ mit $z := x_0$ gilt

$$s(\ulcorner C \urcorner, k) = \ulcorner C(\underline{k}) \urcorner.$$

Es genügt, eine solche Funktion s anzugeben. Sie dürfen verwenden, daß die Funktion

$$s_{\mathrm{Ter}}(n,k) := \begin{cases} \ulcorner \underline{k} \urcorner & \text{falls } n = \langle \mathrm{sn}(\mathrm{Var}), 0 \rangle, \\ n & \text{falls } n = \langle \mathrm{sn}(\mathrm{Var}), (n)_1 \rangle \text{ und } 0<(n)_1, \\ n & \text{falls } n = \langle \mathrm{sn}(0) \rangle, \\ \langle \mathrm{sn}(S), s_{\mathrm{Ter}}((n)_1, k) \rangle & \text{falls } n = \langle \mathrm{sn}(S), (n)_1 \rangle, \\ n & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $\mathcal{L}$-Terme $t = t(z)$ mit $z := x_0$ die Eigenschaft $s_{\mathrm{Ter}}(\ulcorner t \urcorner, k) = \ulcorner t(\underline{k}) \urcorner$ hat und elementar ist.

Aufgabe 43. (4 Punkte). Es sei T eine Theorie wie in Abschnitt 3.1.2 der Vorlesung, $A(x_1, \dots, x_n, y)$ eine Formel und $f \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ eine Funktion. Es gelte

(1) $T \vdash A(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_n}, \underline{f(a_1, \dots, a_n)})$ für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$,

(2) $T \vdash A(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_n}, y) \to A(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_n}, z) \to y{=}z$ für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$,

(3) $T \vdash \underline{b} \neq \underline{c}$ für $b < c$

Zeigen Sie, daß dann $T \vdash \neg A(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_n}, \underline{c})$ falls $c \neq f(a_1, \dots, a_n)$.

Aufgabe 44. (4 Punkte). Beweisen Sie
(a) $\mathrm{Eq}_{\mathcal{L}} \vdash t = s \to r(t) = r(s)$ für alle Terme $r(x)$,
(b) $\mathrm{Eq}_{\mathcal{L}} \vdash t = s \to A(t) \to A(s)$ für alle Formeln $A(x)$. (Hierbei können Sie annehmen, daß keine in A gebundene Variable in t oder s vorkommt).

Abgabe. Mittwoch, 15. Januar 2025 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.