Mathematisches Institut der LMU
Helmut Schwichtenberg

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 37. (4 Punkte). Es seien Γ, Δ Formelmengen. $\Gamma \Vdash A$ bedeutet: Für alle Baummodelle $\mathcal{T}$, Knoten k und Belegungen η gilt

$$\forall_{B \in \Gamma}(\mathcal{T}, k \Vdash B[\eta]) \Rightarrow \mathcal{T}, k \Vdash A[\eta].$$

Es sei $\overline{\Gamma} := \{ A \mid \Gamma \Vdash A \}$. Beweisen Sie

(a) $\Gamma \subseteq \overline{\Gamma}$,

(b) $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow \overline{\Gamma} \subseteq \overline{\Delta}$,

(c) $\overline{\Gamma} = \overline{\overline{\Gamma}}$.

Beweisen oder widerlegen Sie

(d) $\overline{\Gamma \cup \Delta} = \overline{\Gamma} \cup \overline{\Delta}$.

Aufgabe 38. (4 Punkte). $\Gamma \Vdash A$ sei wie in Aufgabe 37 definiert. Beweisen Sie: Wenn $\Gamma \Vdash A$, so gibt es eine endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma$ mit $\Delta \Vdash A$.

Aufgabe 39. (4 Punkte). Beweisen Sie, daß die Klasse $\mathcal{E}$ abgeschlossen ist unter beschränkter Wertverlaufsrekursion. Das heißt: wenn g, h, k gegebene Funktionen in $\mathcal{E}$ sind und f definiert ist durch das Schema

$$\begin{aligned} f(\vec{m}, 0) &= g(\vec{m}), \\ f(\vec{m}, n+1) &= h(n, \langle f(\vec{m}, 0), \dots f(\vec{m}, n) \rangle, \vec{m}), \\ f(\vec{m}, n) &\leq k(\vec{m}, n), \end{aligned}$$

so ist auch f in $\mathcal{E}$.

Aufgabe 40. (4 Punkte). Die Ackermann-Funktion sei definiert durch

$$\begin{aligned} A(0, n) &:= n + 1, \\ A(m+1, 0) &:= A(m, 1), \\ A(m+1, n+1) &:= A(m, A(m+1, n)) \end{aligned}$$

(a) Beweisen Sie: Ist $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ elementar, so auch $\bar{f} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\bar{f}(n) := \max\{ f(n_1, \dots, n_k) \mid n_1 + \dots + n_k \leq n \}$$

(b) Sei $(f \prec g) := \forall_n(\bar{f}(n) \leq g(n))$. Beweisen Sie: Ist f elementar, so gibt es ein m mit $f \prec A(m, \cdot)$.

(c) Beweisen Sie, daß A nicht elementar ist.

Abgabe. Mittwoch, 8. Januar 2025 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.