Mathematisches Institut der LMU
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2024/25
ueb09

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 33. (4 Punkte). (Logik für entscheidbare Prädikate, Fortsetzung von Aufg. 29). Es seien n, m, l Variablen vom Grundtyp $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, die aus 0 und S (Nachfolger) aufgebaut sind. Außer den Konstruktoren 0, S betrachten wir die Funktionssymbole

(i) $=_\mathbb{N}$ (kurz: $=$) vom Typ $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ mit den Berechnungsregeln

$$(0 = 0) := \mathtt{tt}, \quad (0 = Sm) := \mathtt{ff}, \quad (Sn = 0) := \mathtt{ff}, \quad (Sn = Sm) := (n = m).$$

(ii) $+$ vom Typ $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit den Berechnungsregeln

$$(n + 0) := n, \quad (n + Sm) := S(n + m).$$

Weiter verwenden wir Induktionsaxiome der Form

$$\text{Induction}\colon A(0) \to \forall_n (A(n) \to A(Sn)) \to \forall_n A(n).$$

Beweisen Sie, daß aus Induktionsaxiomen herleitbar ist

(a) $\mathbf{F} \to \forall_{n,m}(n = m)$.
(b) $\forall_n (0 + n = n)$.
(c) $\forall_{n,m}(Sn + m = S(n + m))$.
(d) $\forall_{n,m}(n + m = m + n)$.

Aufgabe 34. (4 Punkte). Definieren Sie die folgenden Programme durch explizite Angabe von Instruktionen, d.h. Basisinstruktionen und den in der Vorlesung (Abschnitt 2.1.2) definierten Programmkonstrukten.

(a) $P(x; y)$ berechnst 2^x.
(b) $H(x; y)$ berechnet $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, d.h. die größte Zahl $\leq \frac{x}{2}$.
(c) $L(x; y)$ berechnet den ganzzahligen Logarithmus zur Basis 2, d.h. für $0 < x$ die Zahl y mit $2^y \leq x < 2^{y+1}$.

Aufgabe 35. (4 Punkte). Beweisen Sie, daß folgende Funktionen elementar sind.

(a) $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$.
(b) $n \bmod m$.

Aufgabe 36. (4 Punkte). Formalisieren Sie Aufgabe 33 in Minlog (siehe `ueb09.scm`).

Abgabe. Mittwoch, 18. Dezember 2024 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.