Mathematisches Institut der LMU
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2024/25
ueb08

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 29. (4 Punkte). (Logik für entscheidbare Prädikate). Es seien p, q Variablen vom „Grundtyp“ $\mathbb{B}$ der „booleschen Objekte“, bestehend aus $\mathtt{tt}$ (wahr) und $\mathtt{ff}$ (falsch). *Terme* haben jetzt Typen, die aus Grundtypen mit $\to_{\mathrm{Typ}}$ (kurz: $\to$) aufgebaut sind. Einziges *Prätikatensymbol* ist atom der „Stelligkeit“ ($\mathbb{B}$). *Atomare Formeln* sind $\mathrm{atom}(t)$ (kurz: t) mit t Term vom Typ $\mathbb{B}$. Außer den „Konstruktoren“ $\mathtt{tt}, \mathtt{ff}$ betrachten wir durch „Berechnungsregeln“ definierte *Funktionssymbole* („Programmkonstanten“), hier nur $=_{\mathbb{B}}$ (kurz: $=$) vom Typ $\mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ mit den Berechnungsregeln

$$(\mathtt{tt} = \mathtt{tt}) := \mathtt{tt}, \qquad (\mathtt{tt} = \mathtt{ff}) := \mathtt{ff}, \qquad (\mathtt{ff} = \mathtt{tt}) := \mathtt{ff}, \qquad (\mathtt{ff} = \mathtt{ff}) := \mathtt{tt}.$$

Berechnungsregeln sind zu lesen als Ersetzungsregeln (von links nach rechts). Wir betrachten zwei Terme als gleich, wenn sie ein gemeinsames „Redukt“ haben. Wir schreiben $\mathbf{F}$ für $\mathtt{ff} = \mathtt{tt}$. Beweisen Sie, daß $\mathbf{F} \to \forall_{p,q}(p = q)$ herleitbar ist aus Axiomen

$$\mathrm{CaseDist}\colon A(\mathtt{tt}) \to A(\mathtt{ff}) \to \forall_p A(p).$$

Aufgabe 30. (4 Punkte). Geben Sie Programme an für

$x = \min(y, z)$ schreibt das Minimum von y, z in das Register x,

$x = y \bmod 2$ schreibt den Rest der Division von y durch 2 in x.

Verwenden Sie dabei *ausschließlich* die Basisinstruktionen

Zero: $x := 0$,
Succ: $x := x + 1$,
Jump: [**if** $x = y$ **then** I_n **else** I_m].

Aufgabe 31. (4 Punkte). Beweisen Sie

(a) Für jede subelementare Funktion $f\colon \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ gibt es eine natürliche Zahl k so daß für alle $\vec{n} = n_1, \dots, n_r$ gilt

$$f(\vec{n}\,) < (\max(\vec{n}, 2))^k.$$

(b) Die Funktion $n \mapsto 2^n(1)$ ist nicht subelementar.

Aufgabe 32. (4 Punkte). Formalisieren Sie Aufgabe 29 in Minlog (siehe `ueb08.scm`).

Abgabe. Mittwoch, 11. Dezember 2024 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.