

## Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

**Aufgabe 21.** (4 Punkte). Für Formeln  $A$  mit  $FV(A) \subseteq \{x\}$  verwenden wir die Abkürzungen

$$\mathbf{Drinker}_A := \exists_x(A \rightarrow \forall_x A)$$

$$\mathbf{MP}_A := \neg\neg\exists_x A \rightarrow \exists_x A$$

$$\mathbf{MP}_A^\neg := \neg\forall_x A \rightarrow \exists_x\neg A$$

**MP** steht für Markovs Prinzip. Es sei  $A$  eine Formel mit  $FV(A) \subseteq \{x\}$ . Beweisen Sie

- (a)  $\mathbf{Drinker}_A \vdash \mathbf{MP}_A^\neg$
- (b)  $\mathbf{Drinker}_{\neg A} \vdash \mathbf{MP}_{\neg\neg A}$

**Aufgabe 22.** (4 Punkte). Führen Sie im Beweis des Überdeckungslemmas (durch Induktion über  $A$ )

$$\forall_{k' \succeq_n k} (k' \Vdash A[\eta]) \rightarrow k \Vdash A[\eta]$$

die Fälle  $A \vee B$  und  $\exists_x A$  aus.

**Aufgabe 23.** (4 Punkte). Es seien  $\mathcal{T}$  ein Baummodell,,  $t$  ein Term,  $A$  eine Formel und  $\eta, \xi$  Belegungen in  $|\mathcal{T}|$ . Beweisen Sie:

- (a) Wenn  $\eta(x) = \xi(x)$  für alle  $x \in \text{vars}(t)$ , so gilt  $\eta(t) = \xi(t)$ .
- (b) Wenn  $\eta(x) = \xi(x)$  für alle  $x \in FV(A)$ , so gilt  $\mathcal{T}, k \Vdash A[\eta]$  genau dann, wenn  $\mathcal{T}, k \Vdash A[\xi]$ .

Hinweis: Induktion über Terme bzw. Formeln.

**Aufgabe 24.** (4 Punkte). Formalisieren Sie Aufgabe 21 in Minlog (siehe ueb06.scm).

**Abgabe.** Mittwoch, 27. November 2024 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.