Mathematisches Institut der LMU
Helmut Schwichtenberg

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 9. (4 Punkte). Zeigen Sie jeweils durch Angabe einer Herleitung
(a) $(\neg\neg A \to A) \to (\neg\neg B \to B) \to \neg\neg(A \wedge B) \to A \wedge B$
(b) $\forall_{x,y}(Pxy \to Qxy) \to \forall_x \exists_y (Qxy \to Rxy) \to \forall_x \exists_y (Pxy \to Rxy)$

Aufgabe 10. (4 Punkte). Zeigen Sie mittels Induktion über Formeln daß für alle Formeln A gilt

$$\vdash_i \bot \to A.$$

Verwenden Sie dabei die Regeln für die Verknüpfungen $\to$, $\forall$, $\vee$, $\wedge$, $\exists$. Im Existenzfall muß man noch annehmen, daß der Bereich der Objekte nicht leer ist, etwa durch $\exists_x(A \to A)$ mit einem nullstelligen Relationssymbol A.

Aufgabe 11. (4 Punkte). Wir betrachten die *Disjunktion* eingeführt durch die Axiome

$$\begin{aligned} \vee_0^+ &\colon A \to A \vee B, \\ \vee_1^+ &\colon B \to A \vee B, \\ \vee^- &\colon A \vee B \to (A \to C) \to (B \to C) \to C, \end{aligned}$$

bzw. durch die Regeln

$$\frac{\begin{matrix} \mid M \\ A \end{matrix}}{A \vee B}\,\vee_0^+ \qquad \frac{\begin{matrix} \mid M \\ B \end{matrix}}{A \vee B}\,\vee_1^+ \qquad \frac{\begin{matrix} \\ \mid M \\ A \vee B \end{matrix} \quad \begin{matrix} [u\colon A] \\ \mid N \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} [v\colon B] \\ \mid K \\ C \end{matrix}}{C}\,\vee^- u, v$$

(a) Zeigen Sie, daß die Formeln der Axiome unter Verwendung der Regeln herleitbar sind.
(b) Ax-Herleitungen seien solche mit $\vee$-Axiomen, aber ohne $\vee$-Regeln.
  (i) Zu jeder Ax-Herleitung $M\colon A$ gibt es eine Ax-Herleitung von $A \vee B$.
  (ii) Zu jeder Ax-Herleitung $N\colon B$ gibt es eine Ax-Herleitung von $A \vee B$.
  (iii) Zu Ax-Herleitungen $M\colon A \vee B$, $N\colon C$ und $K\colon C$ mit offenen Annahmen $u\colon A$ in N und $v\colon B$ in K gibt es eine Ax-Herleitung $L\colon C$ in der u, v nicht frei vorkommen.
(c) Folgern Sie, daß bei Hinzunahme der $\vee$-Regeln bzw. der $\vee$-Axiome dieselben Formeln herleitbar sind.

Aufgabe 12. (4 Punkte). Formalisieren Sie die Herleitungen aus den Aufgaben 9 und 10 in Minlog (siehe `ueb03.scm`).

Abgabe. Mittwoch, 6. November 2024 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.