Mathematisches Institut der LMU
Helmut Schwichtenberg



**Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik"**

**Aufgabe 1.** (4 Punkte). Die Mengen der *Terme* $\mathcal{T}$ und Formeln $\mathcal{F}$ sind induktiv definiert durch

$$\mathcal{T} ::= x \mid c \mid f^{(n)}\vec{t}$$
$$\mathcal{F} ::= P^{(n)}\vec{t} \mid A \to B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall_x A \mid \exists_x A$$

wobei $f^{(n)}$ ein $n$-stelliges Funktionssymbol und $P^{(n)}$ ein Relationssymbol der Stelligkeit $n$ ist. Definieren Sie *rekursiv* die Menge $\mathrm{FV}(A)$ der *freien Variablen* von $A$.

**Aufgabe 2.** (4 Punkte). Die *Höhe* $|\cdot|\colon \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ und die *Länge* $\|\cdot\|\colon \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ sind rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} |P| &:= 0 & \|P\| &= 1 \\ |A \circ B| &:= \max(|A|, |B|) + 1 & \|A \circ B\| &:= \|A\| + \|B\| + 1 \\ |\Box_x A| &:= |A| + 1 & \|\Box_x A\| &:= \|A\| + 1 \end{aligned}$$

für $P$ Primformel, $\circ \in \{\to, \wedge, \vee\}$ und $\Box \in \{\forall, \exists\}$. Zeigen Sie durch Induktion über Formeln daß für alle Formeln $A$ gilt

$$\|A\| + 1 \leq 2^{|A|+1}$$

**Aufgabe 3.** (4 Punkte). Bestimmen Sie jeweils alle *negativen*, *positiven* und *strikt positiven* Teilformeln von

$$((A \to B) \to C) \to D$$
$$\exists_x(Px \wedge (Qx \to \forall_y(Ry \to Sy)))$$

**Aufgabe 4.** (4 Punkte). Es seien $R$ ein einstelliges und $\neq$ ein zweistelliges Relationssymbol. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen.

(a) $R$ ist nicht leer.
(b) Es gibt mindestens zwei Elemente in $R$.
(c) Es gibt höchstens zwei Elemente in $R$.
(d) Es gibt genau zwei Elemente in $R$.

**Abgabe.** Mittwoch, 23. Oktober 2022 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.