Mathematisches Institut der LMU
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2024/25
Wiederholungsblatt

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 1.

(a) Beweisen Sie durch Angabe von Herleitungen

$$\vdash A \to \neg\neg A \qquad \vdash \neg\neg\neg A \to \neg A.$$

(b) Beweisen Sie durch Angabe einer Herleitung

$$\vdash (\neg\neg B \to B) \to \neg\neg(A \to B) \to A \to B.$$

(c) Geben Sie für (a) und (b) die Herleitungsterme an.

Aufgabe 2. Geben Sie ein Registermaschinen-Programm an, das für gegebene (verschiedene) Register x, y, z Folgendes leistet:

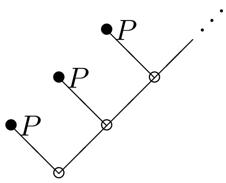
> „$x := y \dot- 1$“ kopiert den modifizierten Vorgänger des Inhalts von Register y in x und simultan den Inhalt von Register y in z.

In dem Programm nur die Basisinstruktionen Zero, Succ, Jump erlaubt.

Aufgabe 3. Beweisen Sie

$$\nvdash_i ((P \to Q) \to P) \to P.$$

Hinweis. Verwenden Sie das in der Vorlesung behandelte Baummodell



Aufgabe 4. Beweisen Sie, daß mit $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auch $g \circ f$ repräsentierber ist.

Aufgabe 5. (a) Geben Sie ein Beispiel einer nicht-elementaren Funktion (mit Begründung).

(b) Beweisen Sie, daß $f(n) := \ulcorner \sqrt{n} \urcorner$ (also die größte natürliche Zahl kleiner oder gleich der Quadratwurzel von n) elementar ist.

Aufgabe 6. Beweisen Sie unter der Annahme der Konsistenz der Robinsonschen Theorie Q daß $\{ \ulcorner A \urcorner \mid Q \vdash A \}$ nicht rekursiv ist. Hinweis. Verwenden Sie den Fixpunktsatz.

Aufgabe 7. Ordinalzahl-Bezeichnungen (kurz: Oz) α, β, γ und eine Relation $<$ zwischen ihnen seien wie in der Vorlesung simultan definiert.

(a) Beweisen Sie
$$\alpha \not< \alpha.$$
(b) Beweisen oder widerlegen Sie
$$\beta < \gamma \to \alpha + \beta < \alpha + \gamma.$$
(c) Beweisen oder widerlegen Sie
$$\alpha < \beta \to \alpha + \gamma < \beta + \gamma.$$