



Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg  
Nils Köpp

WS 23/24  
January 17, 2024

# Mathematische Logik

## Letztes Blatt

**Aufgabe 44 (6 Punkte).** Sei  $T$  wie in Kapitel 3.1.2 der Vorlesung und  $A(x_1, \dots, x_n, y)$  eine Formel,  $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  eine Funktion. Angenommen es gilt für alle  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$

$$T \vdash A(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_n}, \underline{f(a_1, \dots, a_n)}),$$

$$T \vdash A(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_n}, y) \wedge T \vdash A(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_n}, z) \Rightarrow y = z,$$

und für alle  $b, c \in \mathbb{N}$  gilt  $b < c \Rightarrow T \vdash \underline{b} \neq \underline{c}$ . Beweisen sie

$$c \neq f(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow T \vdash \neg A(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_n}, \underline{c}).$$

**Aufgabe 45 (6 Punkte).** (a) Seien  $M, N \subseteq \mathbb{N}$  in  $T$  repräsentierbar. Beweisen sie, dass  $M \cap N$  ebenfalls repräsentierbar ist.

((b)) Angenommen  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sind repräsentierbar in  $T$  mittels  $A(x, y)$  bzw.  $B(y, z)$ . Zeigen sie, dass  $g \circ f$  repräsentierbar in  $T$  ist.

**Aufgabe 46 (4 Punkte).** Sei  $T$  eine Theorie wie in 3.2. der Vorlesung. Ein Gödelsatz  $G$  hat die Eigenschaft

$$T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathbf{P}(\ulcorner G \urcorner),$$

wobei  $\mathbf{P}(\ulcorner A \urcorner) := \exists y (B_{Prf_T}(y, \ulcorner A \urcorner))$ .

(i) Zeigen sie, dass es einen Gödelsatz gibt.

(ii) Wir nehmen zusätzlich an, dass

$$[T \vdash A] \Rightarrow [T \vdash \mathbf{P}(\ulcorner A \urcorner)].$$

Zeigen sie

$$T \not\vdash \perp \Rightarrow T \not\vdash G.$$

**Abgabe.** Mittwoch, 17. Januar 2024, 8:15 (Uni2Work oder in der VL).

**Besprechung.** Freitag, 19. Januar 2024, 8:30, A027.