Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

WS 23/24
December 12, 2023

Mathematische Logik

Blatt 9

Aufgabe 33 (4 Punkte). Definieren sie die folgenden Programme durch explizite Angabe von Instruktionen.

(i) $P(x;y)$ berechnet 2^x.

(ii) $H(x;y)$ berechnet die größte Zahl $\leq \frac{x}{2}$.

(iii) $L(x;y)$ berechnet den ganzzahligen Logarithmus zur Basis 2, d.h. für $0 < x$ die Zahl y, so dass $2^y \leq x \leq 2^{y+1}$.

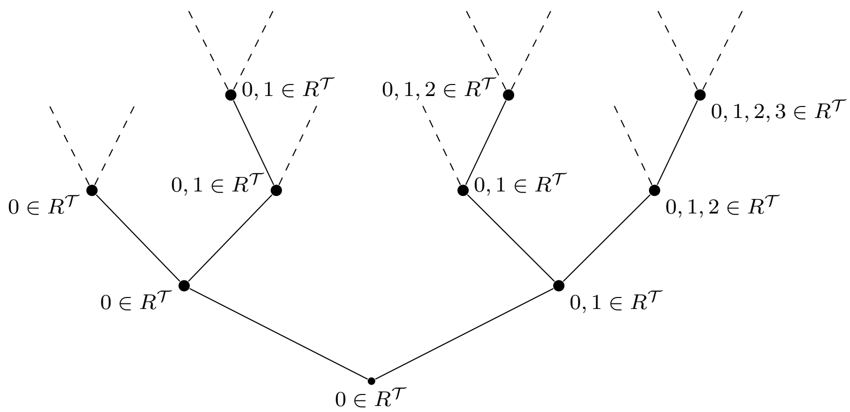
Aufgabe 34 (4 Punkte). Sei $\mathcal{L} := \{\emptyset, \bot, R\}$ wobei R ein einstelliges Relationssymbol ist (d.h. wir betrachten eine Sprache ohne Funktionssymbole und den zwei Relationssymbolen $\bot, R$). Wir definieren

$$T := \{0,1\}^{<\mathbb{N}},$$

d.h. $k \in T \Leftrightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}} \exists_{s_0,\ldots,s_{n-1}\in\{0,1\}}(k = \langle s_0, \ldots, s_{n-1}\rangle)$. Ferner sei $\mathcal{T} := (\mathbb{N}, I_1)$, wobei $I_1(\bot, k) = \emptyset$ für alle $k \in T$ und

$$I_1(R, \langle i_0, \ldots, i_{n-1}\rangle) := \left\{ m \in \mathbb{N} \,|\, n - \sum_{k=0}^{n-1} i_k \geq m \right\},$$

d.h., $m \in I_1(R,k) \Leftrightarrow$"*$k$ hat mindestens m Nuller*".



Zeigen sie

(i) $\mathcal{T}$ ist ein intuitionistisches Baummodell auf T,

(ii) $\nvdash_i \neg\forall_x\neg(Rx \to \forall_x Rx)$.

Aufgabe 35 (4 Punkte). **(i)** Zeigen sie, dass die funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f_k(n) = n \bmod k$ elementar ist.

(ii) Zeigen sie, dass die Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ der ungeraden Zahlen elementar ist.

Aufgabe 36 (4 Punkte). Zeigen sie, dass die Funktion $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die in Aufgabe 31 definierte Funktion. Zeigen sie, dass die Funktion

$$\begin{cases} \hat{\xi} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \\ \hat{\xi}(\langle n, m \rangle) = \xi(n, m) \end{cases}$$

eine Bijektion ist.

Abgabe. Mittwoch, 20. Dezember 2023, 8:15 (Uni2Work oder in der VL).

Besprechung. Freitag, 22. Dezember 2023, 8:30, A027.