



Mathematische Logik

Blatt 8

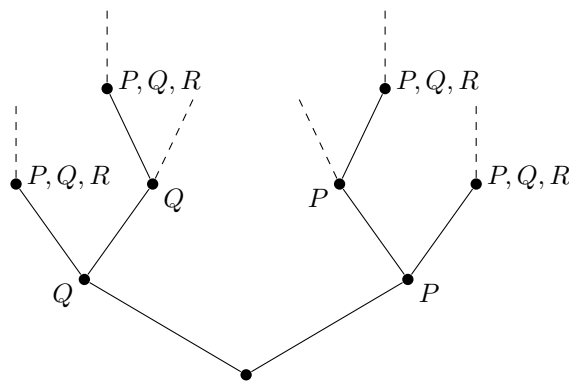
Aufgabe 29 (4 Punkte). Geben sie, durch die explizite Angabe von Listen von *Instruktionen*, *Programme*

$x = \min(y, z)$ schreibt das Minimum der Einträge in Registern y, z in Register x ,
 $x = y \bmod 2$, schreibt den Rest der Division des Registereintrags y mit 2 ins Register x ,

an. Verwenden sie *ausschliesslich* die drei Basisinstruktionen

Zero : $x := 0$,
 Succ : $x := x + 1$,
 Jump : [if ($x = y$) I_n else I_m].

Aufgabe 30 (4 Punkte). Seien P, Q, R paarweise verschiedene nullstellige Relationssymbole. Wir betrachten das folgende Baummodell.



Zeigen sie mithilfe dieses Modells, dass

$$\begin{aligned} \not\vdash (P \wedge Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R), \\ \not\vdash \neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg P \vee \neg Q. \end{aligned}$$

Aufgabe 31 (4 Punkte). Wir definieren Funktionen

$$\xi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, \quad \vartheta_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad (i = 0, 1),$$

mittels der folgenden Rekursion.

$$\xi(i, j) := i + \sum_{k=0}^{i+j} k \quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_i(0) := 0 \quad , i = 0, 1 \\ \vartheta_0(k+1) := \begin{cases} 0 & , \vartheta_1(k) = 0 \\ \vartheta_0(k) + 1 & , \text{sonst.} \end{cases} \\ \vartheta_1(k+1) := \begin{cases} \vartheta_0(k) + 1 & , \vartheta_1(k) = 0 \\ \vartheta_1(k) - 1 & , \text{sonst.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Zeigen sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

(a) $\vartheta_i(k) \leq k$ für $i = 0, 1$,

(b) $\xi(\vartheta_0(k), \vartheta_1(k)) = k$.

Hinweis. Die Funktion ξ lässt sich etwa wie folgt darstellen.

$j \setminus i$	0	1	2	3	...
0	0	2	5	9	
1	1	4	8	13	
2	3	7	12	18	
3	6	11	17	24	
⋮					

Aufgabe 32 (4 Punkte). Formalisieren sie Aufgabe 31 in Minlog (siehe ueb08.scm).

Abgabe. Mittwoch, 13. Dezember 2023, 8:15 (Uni2Work oder in der VL).

Besprechung. Freitag, 15. Dezember 2023, 8:30, A027.