Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

WS 23/24
November 15, 2023

Mathematische Logik

Blatt 5

Aufgabe 17 (4 Punkte). Für Formeln A mit $\mathrm{FV}(A) \subseteq \{x\}$ verwenden wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathbf{LEM}_A &:= \forall_x(A \vee \neg A), & \mathbf{Drinker}_A &:= \exists_x(A \to \forall_x A) \\ \mathbf{LPO}_A &:= \exists_x A \vee \forall_x \neg A, & \mathbf{LPO}_A^{\neg} &:= \exists_x \neg A \vee \forall_x A, \\ \mathbf{MP}_A &:= \neg\neg\exists_x A \to \exists_x A, & \mathbf{MP}_A^{\neg} &:= \neg\forall_x A \to \exists_x \neg A. \end{aligned}$$

Sei nun A eine Formel mit $\mathrm{FV}(A) \subseteq \{x\}$. Zeigen sie *entweder* per Hand, *oder* in Minlog (siehe `ueb05.scm`)

$$\begin{aligned} \forall_x(\bot \to A), \mathbf{LPO}_A^{\neg} &\vdash \mathbf{Drinker}_A, \\ \mathbf{LPO}_A &\vdash \mathbf{Drinker}_{\neg A}, \\ \mathbf{LEM}_A, \mathbf{Drinker}_A &\vdash \mathbf{LPO}_A^{\neg}, \\ \mathbf{Drinker}_A &\vdash \mathbf{MP}_A^{\neg}, \\ \mathbf{Drinker}_{\neg A} &\vdash \mathbf{MP}_{\neg\neg A}. \end{aligned}$$

Aufgabe 18 (4 Punkte). Sei R ein nullstelliges Relationssymbol. Wir definieren rekursiv die folgenden Herleitungen in denen die Annahmen $x : R$ und $f : R \to R$ frei vorkommen.

$$N_0 := (x : R) \qquad N_{n+1} := \left[\dfrac{f : R \to R \qquad N_n}{R}\,{\scriptstyle (\to)^-}\right]$$

Mit Herleitungstermen, gemäß der *Curry-Howard* Korrespondenz, schreibt sich diese Definition als

$$\mathsf{N}_0 := \mathsf{x}^R, \qquad \mathsf{N}_{\mathsf{n+1}} := \mathsf{f}^{R\to R}\mathsf{N}_n^R.$$

Wir definieren die *Churchnumerale* durch

$$M_n = \underline{n} := \left[\dfrac{\dfrac{N_n}{R \to R}\,{\scriptstyle (\to)^+ x}}{(R \to R) \to R \to R}\,{\scriptstyle (\to)^+ f}\right] = \lambda_{\mathsf{f}}\lambda_{\mathsf{x}}\mathsf{N}_n.$$

Ferner ist die *Addition* zweier *Churchnumerale* definiert als

$$\underline{n} \oplus \underline{m} := \left[\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{N_m}{R \to R}\,{\scriptstyle (\to)^+ x} \qquad N_n}{R}\,{\scriptstyle (\to)^-}}{R \to R}\,{\scriptstyle (\to)^+ x}}{(R \to R) \to R \to R}\,{\scriptstyle (\to)^+ f}}{}\right] = \lambda_{\mathsf{f}}\lambda_{\mathsf{x}}\big((\lambda_{\mathsf{x}}\mathsf{N}_m)^{R\to R}\mathsf{N}_n^R\big).$$

(a) Geben sie $\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}$ und $\underline{3}$ jeweils als Herleitung *und* als Term an.
(b) Geben sie $\underline{1} \oplus \underline{1}, \underline{3} \oplus \underline{2}$ als Herleitungen bzw. Terme an und normalisieren sie letztere so weit wie möglich.
(c) Beweisen sie $\underline{n} \oplus \underline{m} \mapsto^* \lambda_{\mathsf{f}}\lambda_{\mathsf{x}}\mathsf{N}_{n+m}$.

Aufgabe 19 (4 Punkte). Zeigen sie, dass für alle Formeln $A \in \mathcal{F}$ gilt

$$\vdash A \to A^g.$$

Aufgabe 20 (4 Punkte). Für jede Formel $A \in \mathcal{F}$ definieren wir die Menge

$$\mathbf{O}_A := \big\{ B \in \mathcal{F} \mid \vdash A \to B \big\} \subseteq \mathcal{F},$$

d.h., $B \in \mathbf{O}_A$ g.d.w. eine geschlossene Herleitung $M : A \to B$ existiert. Ferner definieren wir

$$\mathcal{B} := \big\{ \mathbf{O}_A \mid A \in \mathcal{F} \big\} \cup \big\{ \{\}, \mathcal{F} \big\}.$$

(a) Zeigen sie, dass für alle $A, B \in \mathcal{F}$ gilt
- **(i)** $B \in \mathbf{O}_A \Leftrightarrow \mathbf{O}_B \subseteq \mathbf{O}_A$,
- **(ii)** $\vdash (A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow \mathbf{O}_B = \mathbf{O}_A$.

(b) Zeigen sie, dass $\mathcal{B}$ die Basis einer *Topologie* auf $\mathcal{F}$ ist , d.h. es gilt
- **(i)** für alle $A \in \mathcal{F}$ existiert $\mathbf{O} \in \mathcal{B}$ mit $A \in \mathbf{O}$ ($\mathcal{B}$ überdeckt $\mathcal{F}$),
- **(ii)** für alle $\mathbf{O}, \mathbf{O}' \in \mathcal{B}$ existiert $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ mit $\mathbf{O} \cap \mathbf{O}' = \bigcup \mathcal{S}$.

(c) Beweisen sie, dass die *Gentzen-Übersetzung* $\cdot^g : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ stetig bezüglich der oben definierten Topologie ist. Hierzu genügt es zu zeigen, dass die Urbilder aller Basiselemente offen sind, d.h. für alle $\mathbf{O} \in \mathcal{B}$ existiert $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ mit

$$(\cdot^g)^{-1}[\mathbf{O}] = \bigcup \mathcal{S}.$$

Hinweis. Die in Aufgabe 19 bewiesene Aussage könnte sich als nützlich erweisen.

Abgabe. Mittwoch, 22. November 2023, 8:15 (Uni2Work oder in der VL).

Besprechung. Freitag, 24. November 2023, 8:30, A027.