LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

WS 23/24
November 1, 2023

Mathematische Logik

Blatt 3

Aufgabe 9 (4 Punkte). Zeigen sie jeweils durch Angabe einer Herleitung

$$\vdash \exists_x \forall_z (G_0 \to H) \to \forall_{x,z}(G_1 \to G_0) \to \forall_x \exists_z (G_1 \to H),$$
$$\vdash (\neg\neg B \to B) \to (\neg\neg A \to A) \to \neg\neg(A \wedge B) \to A \wedge B.$$

Aufgabe 10 (4 Punkte). Zeigen sie mittels Induktion über Formeln, dass für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt

$$\vdash_i \bot \to A.$$

Verwenden sie dabei in allen Herleitungen die Regeln für die logischen Verknüpfungen $\vee, \wedge, \exists$.
Bemerkung. Aus einem *induktiven* Beweis des Oberen lässt sich eine konkrete *rekursive* Funktion ablesen, welche jeder Formel $A \in \mathcal{F}$ eine (geschlossene) Herleitung von $\bot \to A$ zuordnet

$$A \mapsto (\mathrm{Ef}_A : \bot \to A).$$

Aufgabe 11 (4 Punkte). Wir betrachten die *Disjunktion* eingeführt durch *Axiome*

$$(\vee)^+_i : A_i \to A_0 \vee A_1 \quad (i = 0, 1), \qquad (\vee)^- : A \vee B \to (A \to C) \to (B \to C) \to C,$$

bzw. mittels den folgenden *Einführung*- und *Beseitigungsregeln*.

$$\begin{array}{c} \vdots\, M \\ A_i \\ \hline A_0 \vee A_1 \end{array}\ (\vee)^+_i \qquad (i = 0, 1), \qquad \begin{array}{ccc} & [u : A] & [v : B] \\ \vdots\, M & \vdots\, N & \vdots\, L \\ A \vee B & C & C \\ \hline & C & \end{array}\ (\vee)^- u, v \quad .$$

i) Zeigen sie, dass die Formeln der Axiome unter Verwendung der Regeln herleitbar sind.
ii) Zeigen sie umgekehrt, dass es zu jeder Herleitung $M : A_i$ eine Herleitung der Formel $A_0 \vee A_1$ (mit $\vee$-Axiomen; ohne $\vee$-Regeln) gibt. Ferner, dass es zu Herleitungen

$$M : A \vee B, \quad N(u) : C, \quad L(v) : C$$

mit offenen Annahmen $(u : A)$ in N und $(v : B)$ in L, eine Herleitung $K : C$ existiert, wobei u, v nicht frei in K vorkommen.

Aus **i)**,**ii)** lässt sich nun schliessen, dass mit Axiomen bzw. Regeln genau dieselben Formeln herleitbar sind, wie?

Aufgabe 12 (4 Punkte). Formalisieren sie die folgenden *Teilbeweise* aus Aufgabe 10 in Minlog (siehe `ueb03.scm`).

$$\vdash \forall_x(\bot \to C) \Rightarrow \begin{cases} \vdash \bot \to \exists_x C \\ \vdash \bot \to \forall_x C \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \vdash \bot \to A \\ \vdash \bot \to B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \vdash \bot \to A \lor B \\ \vdash \bot \to A \land B \\ \vdash \bot \to A \to B \end{cases}$$

Ferner die beiden Herleitungen aus Aufgabe 9.

Abgabe. Mittwoch, 8. November 2023, 8:15 (Uni2Work oder in der VL).

Besprechung. Freitag, 10. November 2023, 8:30, A027.