



Mathematische Logik

Blatt 2

Aufgabe 5 (4 Punkte). Die *Substitution* in Termen ist rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} x[x/s] &:= s, \\ y[x/s] &:= y \quad (x \neq y), \\ c[x/s] &:= c, \\ (f \vec{t})[x/s] &:= f(\vec{t}[x/s]) = f(t_i[x/s])_{i < |\vec{t}|}. \end{aligned}$$

Definieren sie rekursiv die Substitution $A[x/t]$ für Formeln. Beachten sie, dass gebundene Variablen unter Umständen umbenannt werden müssen e.g.,

$$(\forall_x Pxy)[y/fx] = \forall_z (Pz(fx)).$$

Aufgabe 6 (4 Punkte). Zeigen sie jeweils mittels der Angabe einer Herleitung:

$$\begin{aligned} &\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A \\ &\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \\ &\vdash \neg\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg\neg A \rightarrow \neg\neg B \\ (\perp \rightarrow B) &\vdash (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow B) \\ &\vdash \neg\neg\forall_x A \rightarrow \forall_x \neg\neg A \end{aligned}$$

Man beachte, dass bei Anwendung der $(\rightarrow)^+$ -Regel

$$\frac{\begin{array}{c} [u : A] \\ \vdots \\ M \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} (\rightarrow)^+_u$$

die Annahmevariable $u : A$ nicht unbedingt in der Herleitung M vorkommen muss. Insbesondere ist

$$\frac{\frac{[u : A]}{A} (\rightarrow)^+_v}{B \rightarrow A} (\rightarrow)^+_v}{A \rightarrow B \rightarrow A} (\rightarrow)^+_u$$

eine korrekte Herleitung von $A \rightarrow B \rightarrow A$.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Geben sie Herleitungen an für

$$\begin{aligned} &((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), \\ &(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow B \vee C. \end{aligned}$$

Bei der ersten Formel sind jeweils Herleitungen in beide Richtungen anzugeben.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Formalisieren sie die drei Herleitungen aus Aufgabe 7 in Minlog (siehe ueb02.scm).

Abgabe. Mittwoch, 1. November 2023, 8:15 (Uni2Work).

Besprechung. Freitag, 3. November 2023, 8:30, A027.