Mathematisches Institut der LMU
Nils Köpp, Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2022/23
ueb12

## Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

In den Aufgaben 45 und 46 sei $\mathcal{L}$ eine elementar präsentierte Sprache und $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit $|\mathcal{M}| = \mathbb{N}$. Ferner sei 0 eine Konstante in $\mathcal{L}$ und $S$ ein einstelliges Funktionssymbol in $\mathcal{L}$ mit $0^{\mathcal{M}} = 0$ and $S^{\mathcal{M}}(a) = a + 1$.

**Aufgabe 45** (Semantisches Fixpunktlemma)**.** Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ ist *definierbar* in $\mathcal{M}$ wenn es eine $\mathcal{L}$-Formel $A(x_1, \dots, x_n)$ gibt so daß

$$R = \{\, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n \mid \mathcal{M} \models A(\underline{a_1}, \dots \underline{a_n}) \,\}$$

Eine Menge $S$ von Formeln ist *definierbar* in $\mathcal{M}$ wenn $\ulcorner S \urcorner := \{\, \ulcorner A \urcorner \mid A \in S \,\}$ definierbar ist. Beweisen Sie: wenn jede elementare Relation in $\mathcal{M}$ definierbar ist, so findet man zu jeder $\mathcal{L}$-Formel $B(z)$ eine geschlossene $\mathcal{L}$-Formel $A$ mit

$$\mathcal{M} \models A \quad \text{genau dann wenn} \quad \mathcal{M} \models B(\underline{\ulcorner A \urcorner}).$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 44.

**Aufgabe 46** (Tarskis Undefinierbarkeitssatz)**.** Wenn jede elementare Relation in $\mathcal{M}$ definierbar ist, so ist die Menge $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ der in $\mathcal{M}$ gültigen geschlossenen Formeln undefinierbar in $\mathcal{M}$.

In den Aufgaben 47 und 48 sei $\mathcal{L}$ eine elementar präsentierte Sprache mit 0, $S$ nnd $=$ in $\mathcal{L}$, und $T$ eine $\mathcal{L}$-Theorie die die Gleichheitsaxiome $\mathrm{Eq}_{\mathcal{L}}$ enthält.

**Aufgabe 47.** Es sei $A(x, y)$ eine Formel und $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion. Wir nehmen an daß für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt

$$T \vdash A(\underline{a}, \underline{f(a)}),$$
$$T \vdash A(\underline{a}, y) \to A(\underline{a}, z) \to y = z$$

und daß für alle $b, c \in \mathbb{N}$ mit $b < c$ gilt $T \vdash \underline{b} \neq \underline{c}$. Beweisen Sie

$$T \vdash \neg A(\underline{a}, \underline{c}) \quad \text{falls } c \neq f(a).$$

Hinweis. Argumentieren Sie informal aber so, daß jeder Ihrer Schlüsse in $T$ durchgeführt werden kann.

**Aufgabe 48.** (a) Sind die Mengen $M, N \subseteq \mathbb{N}$ repräsentierbar in $T$, so ist es auch $M \cap N$.

(b) Es seien $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in $T$ repräsentierbar durch $A(x, y)$ und $B(y, z)$. Beweisen Sie, daß dann $C := \tilde{\exists}_y (A(x, y) \wedge B(y, z))$ die Funktion $g \circ f$ repräsentiert.

Hinweis. Argumentieren Sie wieder informal aber so, daß Ihre Schlüsse in $T$ durchführbar sind.

**Abgabe.** Mittwoch, 25. Januar 2023 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.