Mathematisches Institut der LMU
Nils Köpp, Helmut Schwichtenberg

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 41. Die Menge $\mathrm{Eq}_{\mathcal{L}}$ der $\mathcal{L}$-Gleichheitsaxiome besteht aus (den universellen Abschlüssen von)

$$
\begin{aligned}
& x = x \quad \text{(Reflexivität)}, \\
& x = y \to y = x \quad \text{(Symmetrie)}, \\
& x = y \to y = z \to x = z \quad \text{(Transitivität)}, \\
& x_1 = y_1 \to \dots \to x_n = y_n \to f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n), \\
& x_1 = y_1 \to \dots \to x_n = y_n \to R(x_1, \dots, x_n) \to R(y_1, \dots, y_n),
\end{aligned}
$$

für alle n-stelligen Funktionssymbole f und Relationssymbole R der Sprache $\mathcal{L}$. Beweisen Sie

(a) $\mathrm{Eq}_{\mathcal{L}} \vdash t = s \to r(t) = r(s)$.
(b) $\mathrm{Eq}_{\mathcal{L}} \vdash t = s \to (A(t) \leftrightarrow A(s))$.

Aufgabe 42. Beweisen Sie

(a) Ein $\mathcal{L}$-Modell $\mathcal{M}$ erfüllt $\mathrm{Eq}_{\mathcal{L}}$ genau dann, wenn $=^{\mathcal{M}}$ eine *Kongruenrelation* ist (d.h., eine mit den Funktionen und Relationen von $\mathcal{M}$ verträgliche Äquivalenzrelation).
(b) Das Koinzidenzlemma gilt auch mit $=^{\mathcal{M}}$ anstelle von $=$: Seien η und ξ zwei Belegungen in $|\mathcal{M}|$ so daß $\mathrm{dom}(\eta) = \mathrm{dom}(\xi)$ und $\eta(x) =^{\mathcal{M}} \xi(x)$ für alle $x \in \mathrm{dom}(\eta)$. Beweisen Sie:
  (i) $t^{\mathcal{M}}[\eta] =^{\mathcal{M}} t^{\mathcal{M}}[\xi]$ falls $\mathrm{vars}(t) \subseteq \mathrm{dom}(\eta)$.
  (ii) $\mathcal{M} \models A[\eta] \leftrightarrow \mathcal{M} \models A[\xi]$ falls $\mathrm{FV}(A) \subseteq \mathrm{dom}(\eta)$.

Aufgabe 43. *Geometrische Formeln* sind definiert durch

$$G, H ::= P \mid G \wedge H \mid G \vee H \mid \exists_x G.$$

Eine *geometrische Implikation* hat die Gestalt $\forall_{\vec{x}}(G \to H)$. Zeigen Sie

(a) Jede geometrische Formel ist äquivalent zu einer Formel der Gestalt $\exists_{\vec{x}}(B_1 \vee \dots \vee B_n)$ mit B_i Konjunktion atomarer Formeln.
(b) Jede geometrische Implikation ist äquivalent zu einer Konjunktion von Formeln

$$\forall_{\vec{x}}(B \to \exists_{\vec{y}}(B_1 \vee \dots \vee B_n))$$

mit B, B_i Konjunktionen atomarer Formeln.

Aufgabe 44. Gegeben sei eine Sprache $\mathcal{L}$ mit den Funktionssymbolen 0, S, $+$, $\cdot$ und den Relationssymbolen $\perp$ und $=$. Definieren Sie eine elementare Funktion s mit der Eigenschaft, daß für jede aus atomaren Formeln mit $\to, \forall, \exists$ aufgebaute Formel $C = C(z)$ (wobei $z := x_0$) gilt

$$s(\ulcorner C \urcorner, k) = \ulcorner C(\underline{k}) \urcorner.$$

Hinweis: Definieren Sie s durch beschränkte Wertverlaufsrekursion.

Abgabe. Mittwoch, 18. Januar 2023 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.