Mathematisches Institut der LMU — Wintersemester 2022/23
Nils Köpp, Helmut Schwichtenberg — ueb10

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 37. Die Funktion GCode: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei wie in Aufgabe 36 definiert durch $\mathrm{GCode}(i,j) = \mathrm{Gs}(i+j) + i$ mit $\mathrm{Gs}(0) = 0, \quad \mathrm{Gs}(n+1) = \mathrm{Gs}(n) + n + 1$. Beweisen Sie

(a) $n < n' \to i \le n \to i' \le n' \to \mathrm{Gs}(n) + (n - i) < \mathrm{Gs}(n') + (n' - i')$.

(b) $\mathrm{GCode}(i,j) = \mathrm{GCode}(i',j') \to i = i' \land j = j'$. Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $i + j = i' + j'$ und $i + j \neq i' + j'$.

(c) GCode: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bijektiv.

Aufgabe 38. Geben Sie ein Programm „$x := \min(y,z)$“ an, und zwar explizit durch eine Liste von Instruktionen.

Aufgabe 39. Die Funktionen *length* und *decoding* sind definiert durch

$$\begin{aligned} \mathrm{lh}(a) &:= \mu_{k \le a}(\mathrm{tl}^{(k)}(a) = 0), \\ (a)_i &:= \mathrm{hd}(\mathrm{tl}^{(\mathrm{lh}(a) \dot{-} (i+1))}(a)). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $a = \langle n_0, n_1, \dots, n_{k-1} \rangle$ gilt

$$\mathrm{lh}(a) = k \text{ und } (a)_i = n_i \text{ für alle } i < k.$$

Aufgabe 40. Beweisen Sie, daß die Klasse $\mathcal{E}$ gegen *elementare Wertverlaufsrekursion* abgeschlossen ist. Das heißt, daß für $h, k \in \mathcal{E}$ auch die Funktion f mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} &f(\vec{m}, n) = h(n, \langle f(\vec{m}, 0), \dots, f(\vec{m}, n-1) \rangle, \vec{m}), \\ &f(\vec{m}, n) \le k(\vec{m}, n) \end{aligned}$$

in $\mathcal{E}$ ist. Hinweis. Verwenden Sie $\bar{f}(\vec{m}, n) := \langle f(\vec{m}, 0), \dots, f(\vec{m}, n-1) \rangle$ und die Abschätzung für Folgennummern.

Abgabe. Mittwoch, 11. Januar 2023 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.