Mathematisches Institut der LMU
Nils Köpp, Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2022/23
ueb09

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 33. Wir betrachten die durch die Funktionssymbole 0 und $+$ und das Relationssymbol $=$ gegebene Sprache $\mathcal{L}$ der Gruppentheorie, und Modelle $\mathcal{M}$ von $\mathcal{L}$ in denen $=$ durch die „wirkliche“ Gleichheit interpretiert wird. Beweisen Sie, daß es keine *endliche* Menge Γ geschlossener Formeln (ohne $\vee$, $\exists$) geben kann mit der Eigenschaft

$$\mathcal{M} \models \Gamma \text{ genau dann wenn } \mathcal{M} \text{ eine unendliche Gruppe ist.}$$

Aufgabe 34. Definieren Sie die folgenden Programme durch explizite Angabe von Instruktionen.
(a) $P(x;y)$ berechnet 2^x.
(b) $H(x;y)$ berechnet die größte Zahl $\leq \frac{x}{2}$.
(c) $L(x;y)$ berechnet den ganzzahligen Logarithmus zur Basis 2, also für $0 < x$ die Zahl y mit $2^y \leq x < 2^{y+1}$.

Aufgabe 35. (a) Beweisen Sie, daß die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f_k(n) = n \mod k$ elementar ist.
(b) Beweisen Sie, daß die Menge U der ungeraden Zahlen elementar ist.

Aufgabe 36. Die Funktionen $\mathrm{GCode}\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $\mathrm{GPair}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ seien definiert durch

$$\mathrm{GCode}(i,j) = \mathrm{Gs}(i+j) + i,$$

$$\mathrm{GPair}(0) = (0,0), \quad \mathrm{GPair}(k+1) = \begin{cases} (0, i+1) & \text{falls } \mathrm{GPair}(k) = (i,0) \\ (i+1, j) & \text{falls } \mathrm{GPair}(k) = (i, j+1) \end{cases}$$

Dabei ist Gs die durch

$$\mathrm{Gs}(0) = 0, \quad \mathrm{Gs}(n+1) = \mathrm{Gs}(n) + n + 1$$

definierte Gauß-Summe. Beweisen Sie $\mathrm{GCode}(\mathrm{GPair}(k)) = k$.

Abgabe. Mittwoch, 21. Dezember 2022 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.