Mathematisches Institut der LMU
Nils Köpp, Helmut Schwichtenberg Wintersemester 2022/23
ueb08

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik"

Aufgabe 29 (Substitutionslemma für $\models$)**.** Es sei $\mathcal{M}$ ein Modell, $t, r(x)$ Terme, $A(x)$ eine Formel und η eine Belegung in $|\mathcal{M}|$. Beweisen Sie

(a) $\eta(r(t)) = \eta_x^{\eta(t)}(r(x))$.

(b) $\mathcal{M} \models A(t)[\eta]$ genau dann wenn $\mathcal{M} \models A(x)[\eta_x^{\eta(t)}]$.

Hinweis. Induktion über Terme t bzw. Formeln A.

Aufgabe 30. Es sei T die Menge aller endlichen Folgen $\langle 0, 0, \dots 0\rangle$ (einschließlich der leeren Folge). Über T betrachten wir die konstanten Baummodelle $\mathcal{T} := (D, I_0, I_1)$ mit $R^{\mathcal{T}}(\vec{a}, k)$ unabhängig von k. Es sei $\mathcal{M} := (D, I_0, I_1^{\mathrm{c}})$ mit $I_1^{\mathrm{c}}(\vec{a}) := R^{\mathcal{M}}(\vec{a}) := R^{\mathcal{T}}(\vec{a}, \langle\rangle)$. Beweisen Sie für alle Formeln A (ohne $\vee$, $\exists$) und alle Belegungen η gilt

$$\mathcal{T} \Vdash A[\eta] \text{ genau dann wenn } \mathcal{M} \models A[\eta].$$

In den Aufgaben 31 und 32 betrachten wir nur Formeln ohne $\vee$, $\exists$.

Aufgabe 31. Ist $\Gamma \cup \Delta$ eine nicht erfüllbare Menge geschlossener Formeln, so muß es eine geschlossene Formel A geben mit

$$\Gamma \models A \text{ und } \Delta \models \neg A.$$

Hinweis. Verwenden Sie den Kompaktheitssatz.

Aufgabe 32. Wir betrachten die durch die Funktionssymbole 0 und $+$ und das Relationssymbol $=$ gegebene Sprache $\mathcal{L}$ der Gruppentheorie, und Modelle $\mathcal{M}$ von $\mathcal{L}$ in denen $=$ durch die „wirkliche" Gleichheit interpretiert wird. Beweisen Sie, daß es keine Menge Γ geschlossener Formeln geben kann mit der Eigenschaft

$$\mathcal{M} \models \Gamma \text{ genau dann wenn } \mathcal{M} \text{ eine endliche Gruppe ist.}$$

Hinweis. Benutzen Sie den Kompaktheitssatz, und betrachten Sie die erweiterte Sprache

$$\mathcal{L}' := \mathcal{L} \cup \{\, c_i \mid i \in \mathbb{N} \,\}$$

wobei die c_i neue Konstantensymbole sind, und die Menge von Formeln

$$\Gamma' := \Gamma \cup \{\, \neg(c_i = c_j) \mid i \neq j \,\}.$$

Abgabe. Mittwoch, 14. Dezember 2022 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.