

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 25. Die Menge \mathbf{Form}^- aller negativen Formeln ist induktiv definiert durch

$$\mathbf{Form}^- ::= \perp \mid R\vec{t} \mid A \rightarrow B \mid A \wedge B \mid \forall_x A.$$

- Geben Sie das dazugehörige Induktionsprinzip an.
- Beweisen Sie, daß für alle $A \in \mathbf{Form}^-$ gilt $\vdash_c \neg\neg A \rightarrow A$.
- Es sei $(\cdot)^g$ die Gentzen-Übersetzung. Beweisen Sie, daß für alle Formeln A gilt $A^g \in \mathbf{Form}^-$.

Aufgabe 26. Es seien Γ, Δ Formelmengen, und

$$\overline{\Gamma} := \{ A \in \mathbf{Form} \mid \Gamma \Vdash A \}$$

Beweisen Sie

- $\Gamma \subseteq \overline{\Gamma}$.
- $\Gamma \subseteq \Delta$ impliziert $\overline{\Gamma} \subseteq \overline{\Delta}$.
- $\overline{\Gamma} = \overline{\overline{\Gamma}}$.
- Beweisen oder widerlegen Sie

$$\overline{\overline{\Gamma \cup \Delta}} = \overline{\Gamma} \cup \overline{\Delta}.$$

Aufgabe 27. Beweisen Sie durch Angabe eines Gegenmodells

- $\not\vdash \perp \rightarrow P$.
- $\not\vdash_i ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$.

Aufgabe 28 (Koinzidenzlemma für \models). Es sei \mathcal{M} ein Modell, t ein Term, A eine Formel und η, ξ Belegungen in $|\mathcal{M}|$. Beweisen Sie

- Wenn $\eta(x) = \xi(x)$ für alle $x \in \text{vars}(t)$, so gilt $\eta(t) = \xi(t)$.
- Wenn $\eta(x) = \xi(x)$ für alle $x \in \text{FV}(A)$, so gilt $\mathcal{M} \models A[\eta]$ genau dann, wenn $\mathcal{M} \models A[\xi]$.

Hinweis. Induktion über Terme t bzw. Formeln A .

Abgabe. Mittwoch, 7. Dezember 2022 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.