Mathematisches Institut der LMU
Nils Köpp, Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2022/23
ueb06

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 21. Für die Menge **Form** aller Formeln definieren wir

$$\mathcal{O}_A := \{ B \in \mathbf{Form} \mid \vdash A \to B \},$$

d.h.,

$B \in \mathcal{O}_A \Leftrightarrow$ es existiert eine Herleitung $M\colon A \to B$ (ohne freie Annahmen).

Ferner definieren wir

$$\mathcal{B} := \{ \mathcal{O}_A \mid A \in \mathbf{Form} \} \cup \{\emptyset, \mathbf{Form}\}.$$

Zeigen sie, daß für alle $A, B \in \mathbf{Form}$ gilt

(a) $B \in \mathcal{O}_A \Leftrightarrow \mathcal{O}_B \subseteq \mathcal{O}_A$.
(b) $\vdash (A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow \mathcal{O}_B = \mathcal{O}_A$.

Zeigen sie weiter, daß $\mathcal{B}$ die Basis einer *Topologie* auf **Form** ist, d.h.,

(c) für alle $A \in \mathbf{Form}$ existiert $\mathcal{O} \in \mathcal{B}$ mit $A \in \mathcal{O}$,
(d) für alle $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1 \in \mathcal{B}$ und $A \in \mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O}_1$ existiert $\mathcal{O}_2 \in \mathcal{B}$ mit

$$A \in \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O}_1.$$

Aufgabe 22. Beweisen sie, daß die *Gentzen-Übersetzung* $\cdot^g$ stetig bezüglich der oben definierten Topologie ist. Es genügt zu zeigen, daß die Urbilder aller Basiselemente offen sind, d.h., daß für alle $\mathcal{O} \in \mathcal{B}$ eine Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ existiert mit

$$(\cdot^g)^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup \mathcal{S}.$$

Hinweis. In der Vorlesung wurde bewiesen, daß $\vdash A \to A^g$ für alle $A \in \mathbf{Form}$.

Aufgabe 23. Führen Sie den Beweis des Überdeckungslemmas

$$\forall_{k' \succeq_n k}(k' \Vdash A[\eta]) \to k \Vdash A[\eta]$$

(durch Induktion über A) in den Fällen $A \vee B$, $\exists_x A$, $A \wedge B$ und $\forall_x A$ aus.

Aufgabe 24 (Substitutionslemma)**.** Es sei $\mathcal{T}$ ein Baummodell, $t, r(x)$ Terme, $A(x)$ eine Formel und η eine Belegung in $|\mathcal{T}|$. Beweisen Sie

(a) $\eta(r(t)) = \eta_x^{\eta(t)}(r(x))$.
(b) $\mathcal{T}, k \Vdash A(t)[\eta]$ genau dann, wenn $\mathcal{T}, k \Vdash A(x)[\eta_x^{\eta(t)}]$.

Hinweis. Induktion über Terme t bzw. Formeln A.

Abgabe. Mittwoch, 30. November 2022 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.