Mathematisches Institut der LMU
Nils Köpp, Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2022/23
ueb05

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 17. Beweisen Sie $\vdash_c (A \leftrightarrow A^g)$ für A ohne $\vee, \exists$. Hinweis. Induktion über A.

Aufgabe 18 (Substitutivität von $\mapsto$)**.** Der Abschluß $\mapsto$ der in der Vorlesung definierten Konversions-Relation $\mapsto_\beta$ zwischen Herleitungstermen ist induktiv definiert durch

(a) Wenn $M \mapsto_\beta M'$, so $M \mapsto M'$.
(b) Wenn $M \mapsto M'$, so auch $MN \mapsto M'N$, $NM \mapsto NM'$, $\lambda_v M \mapsto \lambda_v M'$ (*innere Reduktionen*).

$M \mapsto N$ bedeutet also „M reduziert in einem Schritt auf N“, d.h., N ergibt sich aus M durch Ersetzen (eines Vorkommens) eines Redex M' von M durch das Resultat M'' der Konversion von M'. Die Relation $\mapsto^*$ sei der reflexive und transitive Abschluß von $\mapsto$. Beweisen Sie

(a) Wenn $M(v) \mapsto M'(v)$, so $M(N) \mapsto M'(N)$.
(b) Wenn $N \mapsto N'$, so $M(N) \mapsto^* M(N')$.

Hinweis. Induktion über $M(v)$.

Aufgabe 19. Beweisen Sie, daß aus $k \Vdash A[\eta]$ und $k \preceq k'$ folgt $k' \Vdash A[\eta]$. Hinweis. Definition von $\Vdash$ und die Monotonie von I_1.

Aufgabe 20 (Koinzidenzlemma)**.** Es sei $\mathcal{T}$ ein Baummodell, t ein Term, A eine Formel und η, ξ Belegungen in $|\mathcal{T}|$. Beweisen Sie

(a) Wenn $\eta(x) = \xi(x)$ für alle $x \in \mathrm{vars}(t)$, so gilt $\eta(t) = \xi(t)$.
(b) Wenn $\eta(x) = \xi(x)$ für alle $x \in \mathrm{FV}(A)$, so gilt $\mathcal{T}, k \Vdash A[\eta]$ genau dann, wenn $\mathcal{T}, k \Vdash A[\xi]$.

Hinweis. Induktion über Terme t bzw. Formeln A.

Abgabe. Mittwoch, 23. November 2022 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.