Mathematisches Institut der LMU
Nils Köpp, Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2022/23
ueb03

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 9. Wie in Aufgabe 3 sei die Menge $\mathbb{Y}$ der binären Bäume induktiv definiert durch die beiden Regeln

$$* \in \mathbb{Y}, \qquad t, s \in \mathbb{Y} \to (t \circ s) \in \mathbb{Y},$$

und die Höhe $|\cdot|\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{N}$ von Bäumen definiert durch

$$|*| := 0, \qquad |t \circ s| := \max(|t|, |s|) + 1.$$

Wie definieren noch die Länge $\|t\|\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{N}$ von Bäumen durch

$$\|*\| := 1, \qquad \|t \circ s\| := \|t\| + \|s\|.$$

Beweisen Sie, daß für allen natürlichem Zahlen n und alle Bäume t gilt

$$|t| = n \to n + 1 \leq \|t\| \leq 2^{n+1}.$$

Aufgabe 10. Das Einführungsaxiom und das Beseitigungsaxiom für den Existenzquantor $\exists$ sind

$$\exists^+\colon A \to \exists_x A, \qquad \exists^-\colon \exists_x A \to \forall_x (A \to B) \to B \quad (x \notin \mathrm{FV}(B)).$$

Beweisen Sie, daß die einander entsprechenden Regeln und Axiome für $\exists$ äquivalent sind.

Aufgabe 11. Geben Sie Herleitungen an für

$$\begin{aligned}
(\forall_x A \to B) &\leftarrow \exists_x (A \to B) \quad \text{falls } x \notin \mathrm{FV}(B),\\
(A \to \forall_x B) &\leftrightarrow \forall_x (A \to B) \quad \text{falls } x \notin \mathrm{FV}(A),\\
(\exists_x A \to B) &\leftrightarrow \forall_x (A \to B) \quad \text{falls } x \notin \mathrm{FV}(B).
\end{aligned}$$

Aufgabe 12. Geben Sie eine Herleitung an für

$$\vdash (\neg\neg A \to A) \to (\neg\neg B \to B) \to \neg\neg(A \wedge B) \to A \wedge B$$

Abgabe. Mittwoch, 9. November 2022 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.