Mathematisches Institut der LMU — Wintersemester 2022/23
Nils Köpp, Helmut Schwichtenberg — ueb01

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 1. Formalisieren Sie folgende Aussagen (x, y, ε, δ Variablen für reelle Zahlen, 0 Konstante, $\leq$, $<$ zweistellige Relationssymbole, d zweistelliges Funktionssymbol (für die Distanz), f einstelliges Funktionssymbol):

(a) f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$,
(b) f ist gleichmäßig stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Formalisieren Sie folgende Aussagen (x, y, z, u Variablen für Mengen, ϵ, $=$ zweistellige Relationssymbole). Verwenden Sie $A \leftrightarrow B$ als Abkürzung für $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

(a) Zu je zwei Mengen x, y gibt es eine Menge z, deren Elemente genau x und y sind.
(b) Zu jeder Menge x gibt es eine Menge y, die aus den Elementen aller Elemente von x besteht.
(c) Zu jeder Menge x gibt es eine Menge y, deren Elemente genau die Teilmengen von x sind.

Aufgabe 3. Die Menge $\mathbb{Y}$ der binären Bäume ist induktiv definiert durch die beiden Regeln

$$* \in \mathbb{Y}, \qquad t, s \in \mathbb{Y} \to (t \circ s) \in \mathbb{Y},$$

und $\mathbb{Y}$ ist die kleinste Menge mit dieser Eigenschaft, formal ausgedrückt durch das Induktionsschema

$$P* \to \forall_{t,s \in \mathbb{Y}} (Pt \to Ps \to P(t \circ s)) \to \forall_{t \in \mathbb{Y}} Pt.$$

(a) Zeigen Sie, daß $\forall_{t \in \mathbb{Y}}(t = * \vee \exists_{t_0,t_1 \in \mathbb{Y}}\, t = (t_0 \circ t_1))$ gilt.
(b) Wir definieren die Höhe $|\cdot|\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{N}$ von Bäumen durch

$$|*| := 0, \qquad |t \circ s| := \max(|t|, |s|) + 1.$$

Zeigen sie

$$P* \to \forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{t,s \in \mathbb{Y}}(|t|, |s| \leq n \to Pt \to Ps \to P(t \circ s)) \to \forall_{t \in \mathbb{Y}} Pt.$$

Hinweis: Zeigen Sie unter den angegebenen Voraussetzungen, daß dann auch $\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{t \in \mathbb{Y}}(|t| \leq n \to Pt)$ gilt.

Aufgabe 4. Geben Sie Herleitungen an für

$$A \to B \to A,$$
$$(A \to B \to C) \to B \to A \to C,$$
$$\forall_x \forall_y Rxy \to \forall_y \forall_x Rxy.$$

Abgabe. Mittwoch, 26. Oktober 2022 um 8:15, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work.