Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2009/2010
Blatt 13

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 49. Für jede Folge $a_0, \dots, a_{n-1} < b$ von Zahlen $< b$ findet man eine Zahl c mit $\beta(c, i) = a_i$ für alle $i < n$. In der Vorlesung war c definiert durch

$$a := \pi(b, n), \qquad d := \prod_{i<n}(1 + \pi(a_i, i)a!), \qquad c := \pi(a!, d).$$

Man zeige, daß $c \leq 4 \cdot 4^{n(b+n+1)^4}$. (Hinweis: $\pi(b, n) < (b + n + 1)^2$. Zwischenergebnis: $d \leq (a + 1)!^n$. Man verwende noch $(a + 1)! \leq (a + 1)^a$ und $a + 1 \leq 2^a$.)

Aufgabe 50. Man konstruiere eine elementare Funktion $f_{i,j}$, die folgendes leistet. Ist P ein Programm mit Index e, das den Registern v_i und v_j keine neuen Werte zuweist, so ist $f_{i,j}(e)$ ein Index des Programms

for $v_i = 1 \dots v_j$ **do** P **od**.

Aufgabe 51. (a) Gegeben seien Relationen R_i $(i = 1, 2)$ und R mit

$$R_i(\vec{n}) \leftrightarrow \exists_{k_1} \dots \exists_{k_{l_i}} E_i(\vec{n}, k_1, \dots, k_{l_i}) \quad (E_i \text{ elementare Relation}),$$
$$R(\vec{n}) \leftrightarrow R_1(\vec{n}) \wedge R_2(\vec{n}).$$

Man zeige, daß R Σ^0_1-definierbar ist.

(b) Gegeben seien Relationen R und S mit

$$R(\vec{n}, k) \leftrightarrow \exists_{k_1} \dots \exists_{k_l} E(\vec{n}, k, k_1, \dots, k_l) \quad (E \text{ elementare Relation}),$$
$$S(\vec{n}, m) \leftrightarrow \forall_{k<m} R(\vec{n}, k).$$

Man zeige, daß S Σ^0_1-definierbar ist. (Hinweis: Folgenkodierung.)

Aufgabe 52. Man zeige, daß es keine totale berechenbare zweistellige Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt derart, daß es zu jeder totalen berechenbaren Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ein $e_g \in \mathbb{N}$ gibt mit $f(e_g, n) = g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Abgabe. Mittwoch, 3. Februar 2010, in der Vorlesung.