Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2009/2010
Blatt 12

**Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“**

**Aufgabe 45.** Man zeige, daß die Klasse $\mathcal{E}$ unter beschränkten Produkten abgeschlossen ist. Genauer: ist $f(\vec{m}, n) = \prod_{i<n} g(\vec{m}, i)$ und $g \in \mathcal{E}$, so ist auch $f \in \mathcal{E}$.

**Aufgabe 46.** Man zeige, daß mit $g$ auch die durch

$$f(\vec{n}, m) = \max_{k<m}(g(\vec{n}, k) = 0)$$

definierte Funktion elementar ist. (Die Funktion soll den Wert 0 haben, falls es kein $k < m$ mit $g(\vec{n}, k) = 0$ gibt.)

**Aufgabe 47.** Man zeige, daß die folgenden Relationen und Funktionen elementar sind.

(a) $n|m$ ($n$ teilt $m$).
(b) $n$ ist die Summe zweier Quadrate.
(c) Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen.
(d) $n$ ist „vollkommen“, d.h., die Summe seiner echten Teiler (Beispiel: 6 ist vollkommen). (Hinweis: Man verwende beschränkte Quantoren, und die in der Vorlesung angegebene Abschätzung für Folgennummern.)

**Aufgabe 48.** Eine Wohlordnung ist eine lineare (irreflexive) Ordnung $\prec$, in der es keine unendlichen absteigenden Ketten $a_0 \succ a_1 \succ a_2 \succ \dots$ gibt. (Zum Beispiel ist $<$ eine Wohlordnung von $\mathbb{N}$, aber nicht von $\mathbb{Z}$). Man zeige, daß „$\prec$ ist Wohlordnung“ undefinierbar ist. Genauer: gegeben sei eine Sprache mit einem zweistelligen Relationssymbol $\prec$. Man zeige, daß es keine Menge $\Gamma$ geschlossener Formeln gibt so daß $\mathcal{M} \models \Gamma$ genau dann, wenn $\prec^{\mathcal{M}}$ eine Wohlordnung von $|\mathcal{M}|$ ist.

**Abgabe.** Mittwoch, 27. Januar 2010, in der Vorlesung.