Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2009/2010
Blatt 10

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 37. *Geometrische Formeln* sind definiert durch

$$G, H ::= P \mid G \wedge H \mid G \vee H \mid \exists_x G.$$

Eine *geometrische Implikation* hat die Gestalt $\forall_{\vec{x}}(G \to H)$. Man zeige

(a) Jede geometrische Formel ist äquivalent zu einer Formel der Gestalt $\exists_{\vec{x}}(B_1 \vee \cdots \vee B_n)$ mit B_i Konjunktion atomarer Formeln.

(b) Jede geometrische Implikation ist äquivalent zu einer Konjunktion von Formeln

$$\forall_{\vec{x}}(B \to \exists_{\vec{y}}(B_1 \vee \cdots \vee B_n))$$

mit B, B_i Konjunktionen atomarer Formeln.

Aufgabe 38. Ein $\mathcal{L}$-Modell $\mathcal{M}$ erfüllt die Gleichheitsaxiome genau dann, wenn $=^{\mathcal{M}}$ eine *Kongruenrelation* ist (d.h., eine mit den Funktionen und Relationen von $\mathcal{M}$ verträgliche Äquivalenzrelation). Das Koinzidenzlemma gilt auch mit $=^{\mathcal{M}}$ anstelle von $=$: Seien η und ξ zwei Belegungen in $|\mathcal{M}|$ so daß $\mathrm{dom}(\eta) = \mathrm{dom}(\xi)$ und $\eta(x) =^{\mathcal{M}} \xi(x)$ für alle $x \in \mathrm{dom}(\eta)$. Man zeige

(a) $t^{\mathcal{M}}[\eta] =^{\mathcal{M}} t^{\mathcal{M}}[\xi]$ falls $\mathrm{vars}(t) \subseteq \mathrm{dom}(\eta)$.

(b) $\mathcal{M} \models A[\eta] \leftrightarrow \mathcal{M} \models A[\xi]$ falls $\mathrm{FV}(A) \subseteq \mathrm{dom}(\eta)$.

Aufgabe 39. Zugrunde liege eine abzählbare Sprache $\mathcal{L}$. Man zeige: Hat eine $\mathcal{L}$-Theorie T ein abzählbares Modell, so auch ein überabzählbares (z.B. eines, in dessen Äquivalenzklassen sich die reellen Zahlen injektiv einbetten lassen).

Aufgabe 40. Ein Körper $\mathcal{K}$ heißt (i) von der *Charakteristik* 0, wenn in ihm jedes Vielfache des Einselements vom Nullelement verschieden ist, und (ii) von der *Charakteristik* p, wenn p die kleinste natürliche Zahl ist so, daß das p-fache des Einselements das Nullelement ist. Man zeige: Gilt ein Satz A der Sprache der Körpertheorie in allen Körpern der Charakteristik 0, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß A auch in allen Körpern einer Charakteristik $p > n$ gilt.

*** Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr! ***

Abgabe. Mittwoch, 13. Januar 2010, in der Vorlesung.