Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2009/2010
Blatt 9

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik"

Aufgabe 33. Die Menge $\mathrm{Eq}_{\mathcal{L}}$ der $\mathcal{L}$-Gleichheitsaxiome besteht aus (den universellen Abschlüssen von)

$$
\begin{aligned}
&x = x \quad \text{(Reflexivität)},\\
&x = y \to y = x \quad \text{(Symmetrie)},\\
&x = y \to y = z \to x = z \quad \text{(Transitivität)},\\
&x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n),\\
&x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to R(x_1, \dots, x_n) \to R(y_1, \dots, y_n),
\end{aligned}
$$

für alle n-stelligen Funktionssymbole f und Relationssymbole R der Sprache $\mathcal{L}$. Man zeige

(a) $\mathrm{Eq}_{\mathcal{L}} \vdash t = s \to r(t) = r(s)$.
(b) $\mathrm{Eq}_{\mathcal{L}} \vdash t = s \to (A(t) \leftrightarrow A(s))$.

Aufgabe 34. Es sei M unendlich. Man zeige, daß das Mengensystem $F := \{\, X \subseteq M \mid M \setminus X \text{ endlich} \,\}$ ein Filter ist (der *Fréchet Filter* auf M).

Aufgabe 35. Es sei R ein dreistelliges Relationssymbol für den Graphen der Funktion $\lambda_{y,x}(y + 2^x)$, d.h., $Ryxz$ soll $y + 2^x = z$ ausdrücken. In der Sprache mit R, einer Konstanten 0 und einem einstelligen Funktionssymbol S fixieren wir die Bedeutung von R durch die Annahmen

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Hyp}_1 := \forall_y R(y, 0, \mathrm{S}y),\\
&\mathrm{Hyp}_2 := \forall_{y,x,z,z_1}(Ryxz \to Rzxz_1 \to R(y, \mathrm{S}x, z_1)).
\end{aligned}
$$

Sei noch

$$D_i := \forall_{z_i, z_{i-1}, \dots, z_0}(R00z_i \to R0z_iz_{i-1} \to \dots R0z_1z_0 \to \bot) \to \bot.$$

D_i bedeutet intuitiv, daß es Zahlen $z_i = 1$, $z_{i-1} = 2^{z_i} = 2$, $z_{i-2} = 2^{z_{i-1}} = 2^2$, $z_{i-3} = 2^{z_{i-2}} = 2^{2^2}$ und schließlich $z_0 = 2_i$ gibt (wobei $2_0 := 1$, $2_{n+1} := 2^{2_n}$). Sei E_i die Prämisse von D_i und M_i eine normale Herleitung von $R\bar{m}\bar{n}\bar{k}$ aus E_i, Hyp_1, Hyp_2 (wobei $\bar{0} := 0$, $\overline{n+1} := \mathrm{S}\bar{n}$). Man zeige:

(a) M_i verwendet nicht die Annahme E_i.
(b) M_i enthält mindestens 2^n Vorkommen von Hyp_1.
(c) Es gilt $m + 2^n = k$.

Aufgabe 36. Man zeige, daß jede normale Herleitung N_i von D_i aus Hyp_1, Hyp_2 mindestens 2_i Knoten hat. (Hinweis. Man kann annehmen, daß N_i keine freien Variablen enthält; sonst ersetze sie man durch 0. Man betrachte den Hauptast von N_i und verwende das Ergebnis von Aufgabe 35).

Abgabe. Mittwoch, 23. Dezember 2009, in der Vorlesung.