Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2009/2010
Blatt 8

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik"

Aufgabe 29 (Mints-Formel)**.** Man konstruiere eine normale Herleitung für

$$((((P \to Q) \to P) \to P) \to Q) \to Q$$

(und beachte dabei, wie die Suche nach einer *normalen* Herleitung die Beweissuche steuert).

Aufgabe 30. Man zeige durch Angabe eines geeigneten Baummodells, daß $\nvdash_i \tilde{\exists}_x Px \to \exists_x Px$.

Aufgabe 31 (Substitutionslemma)**.** Es seien $\mathcal{M}$ ein Modell, $t, r(x)$ Terme, $A(x)$ eine Formel und η eine Belegung in $|\mathcal{M}|$. Man zeige

(a) $\eta(r(t)) = \eta_x^{\eta(t)}(r(x))$.

(b) $\mathcal{M} \models A(t)[\eta]$ genau dann, wenn $\mathcal{M} \models A(x)[\eta_x^{\eta(t)}]$.

Aufgabe 32. Sei M_i Herleitung von $A_i(0)$ aus Hyp_1, Hyp_2 (s. Aufgabe 24),

$$N_0(w_0) := w_0 z_0 v_0,$$
$$N_i(w_i) := u_i 0 M_i \lambda_{z_{i-1}, u_{i-1}, v_{i-1}} N_{i-1}(w_i z_i v_i) \quad (i > 0), \text{ wobei}$$
$$u_i \colon A_{i-1}(z_i) \quad (i > 0),$$
$$v_i \colon R0 z_{i+1} z_i,$$
$$w_i \colon \forall_{z_i}(R0 z_{i+1} z_i \to \forall_{z_{i-1}}(R0 z_i z_{i-1} \to \dots \forall_{z_0}(R0 z_1 z_0 \to \bot)\dots)).$$

(a) Man bestimme die in $N_i(w_i)$ freien Annahme- und Objektvariablen.

Sei N_i' das Ergebnis der Ersetzung von z_{i+1} durch 0 in $N_i(w_i)$, und N_i'' das Ergebnis der Ersetzung von z_i durch S0 in N_i'. Die in N_i'' freien Annahmevariablen sind

$$u_i' \colon A_{i-1}(\mathrm{S}0) \quad (i > 0),$$
$$v_i'' \colon R(0, 0, \mathrm{S}0),$$
$$w_i' \colon \forall_{z_i}(R00 z_i \to \forall_{z_{i-1}}(R0 z_i z_{i-1} \to \dots \forall_{z_0}(R0 z_1 z_0 \to \bot)\dots)).$$

(b) Man gebe eine Herleitung von $\bot$ aus Hyp_1, Hyp_2 und w_i' an, deren Höhe durch eine in i lineare Funktion beschränkt ist. (Hinweis: Aufgabe 24).

(c) Man folgere aus (b), daß D_i aus Hyp_1, Hyp_2 herleitbar ist, wobei

$$D_i := \forall_{z_i, z_{i-1}, \dots, z_0}(R00 z_i \to R0 z_i z_{i-1} \to \dots R0 z_1 z_0 \to \bot) \to \bot.$$

Was bedeutet D_i intuitiv?

Abgabe. Mittwoch, 16. Dezember 2009, in der Vorlesung.