Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2009/2010
Blatt 6

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 21. Man leite die Peirce-Formel $((P \to Q) \to P) \to P$ her aus $\neg\neg P \to P$ und $\bot \to Q$.

Aufgabe 22. Es seien $\mathcal{T}$ ein Baummodell, t ein Term, A eine Formel und η Belegung in $|\mathcal{T}|$. Man zeige, daß aus $k \Vdash A[\eta]$ und $k \preceq k'$ folgt $k' \Vdash A[\eta]$.

Aufgabe 23. Es seien $\mathcal{T}$ ein Baummodell, t ein Term, A eine Formel und η, ξ Belegungen in $|\mathcal{T}|$. Man zeige:

(a) Gilt $\eta(x) = \xi(x)$ für alle $x \in \mathrm{vars}(t)$, so ist $\eta(t) = \xi(t)$.

(b) Gilt $\eta(x) = \xi(x)$ für alle $x \in \mathrm{FV}(A)$, so gilt $\mathcal{T}, k \Vdash A[\eta]$ genau dann, wenn $\mathcal{T}, k \Vdash A[\xi]$.

Aufgabe 24. Es sei R ein dreistelliges Relationssymbol für den Graphen der Funktion $\lambda_{y,x}(y + 2^x)$, d.h., $Ryxz$ soll $y + 2^x = z$ ausdrücken. In der Sprache mit R, einer Konstanten 0 und einem einstelligen Funktionssymbol S fixieren wir die Bedeutung von R durch die Annahmen

$$\begin{aligned}\mathrm{Hyp}_1 &:= \forall_y R(y, 0, \mathrm{S}y),\\ \mathrm{Hyp}_2 &:= \forall_{y,x,z,z_1}(Ryxz \to Rzxz_1 \to R(y, \mathrm{S}x, z_1)).\end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned}A_0(x) &:= \forall_y(\forall_z(Ryxz \to \bot) \to \bot),\\ A_{i+1}(x) &:= \forall_{y\in A_i}(\forall_{z\in A_i}(Ryxz \to \bot) \to \bot),\end{aligned}$$

wobei $\forall_{y\in A_i} B$ eine Abkürzung ist für $\forall_y(A_i(y) \to B)$. Die *Höhe* $|M|$ einer $\to,\forall$-Herleitung M ist definiert durch $|u| := 0$, $|\lambda_u M| := |\lambda_x M| := |M| + 1$, $|MN| := \max(|M|, |N|) + 1$, $|Mr| := |M| + 1$. Man zeige

(a) $\mathrm{Hyp}_1 \vdash A_0(0)$.

(b) $\mathrm{Hyp}_2 \vdash \forall_x(A_i(x) \to A_i(\mathrm{S}x))$ mit einer von i unabhängigen Herleitungshöhe.

(c) $\mathrm{Hyp}_1, \mathrm{Hyp}_2 \vdash A_i(0)$ mit einer konstanten (also von i unabhängigen) Schranke für die Herleitungshöhe.

Lösung. (b). Wir verwenden die Annahmevariablen

$$
\begin{aligned}
&d\colon A_{i+2}(x) \quad \text{(wird zweimal verwendet)},\\
&e_1\colon A_{i+1}(y),\\
&e_2\colon A_{i+1}(z),\\
&e_3\colon Ryxz,\\
&e_4\colon A_{i+1}(z_1),\\
&e_5\colon Rzxz_1,\\
&w\colon \forall_{z_1\in A_{i+1}}\neg R(y,\mathrm{S}x,z_1).
\end{aligned}
$$

Man erhält:

$$
\begin{aligned}
&M_1 := \mathrm{Hyp}_2 yxzz_1e_3e_5\colon R(y,\mathrm{S}x,z_1)\\
&M_2 := wz_1e_4M_1\colon \bot\\
&M_3 := \lambda_{z_1,e_4,e_5}M_2\colon \forall_{z_1\in A_{i+1}}\neg Rzxz_1\\
&M_4 := dze_2M_3\colon \bot\\
&M_5 := \lambda_{z,e_2,e_3}M_4\colon \forall_{z_1\in A_{i+1}}\neg Ryxz\\
&M_6 := dye_1M_5\colon \bot\\
&M_7 := \lambda_{x,d,y,e_1,w}M_6\colon \forall_x(A_{i+2}(x)\to A_{i+2}(\mathrm{S}x))
\end{aligned}
$$

(c). Wir verwenden die Annahmevariablen

$$
\begin{aligned}
&d\colon A_{i+1}(x),\\
&e_6\colon \forall_{z\in A_{i+1}}\neg R(x,0,z).
\end{aligned}
$$

Man erhält:

$$
\begin{aligned}
&M_1(d)\colon A_{i+1}(\mathrm{S}x) \quad \text{nach (b)}\\
&M_2 := \mathrm{Hyp}_1 x\colon R(x,0,\mathrm{S}x)\\
&M_3 := e_6(\mathrm{S}x)M_1(d)M_2\colon \bot\\
&M_4 := \lambda_{x,d,e_6}M_6\colon A_{i+2}(0) := \forall_{x\in A_{i+1}}(\forall_{z\in A_{i+1}}\neg Rx0z\to\bot).
\end{aligned}
$$

Abgabe. Mittwoch, 2. Dezember 2009, in der Vorlesung.