Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2009/2010
Blatt 5

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik"

Aufgabe 17. Für ein zweistelliges Relationssymbol R leite man her: Ist R symmetrisch und transitiv, so ist R auch reflexiv auf seinem Feld, also

$$\forall_{x,y}(xRy \to yRx) \to \forall_{x,y,z}(xRy \to yRz \to xRz) \to$$
$$\forall_x(\exists_y xRy \lor \exists_y yRx \to xRx).$$

Aufgabe 18. Eine zweistellige Relation R hat die *Diamanteneigenschaft* wenn aus xRy_1 und xRy_2 die Existenz eines z folgt mit y_1Rz und y_2Rz. R heißt *konfluent* wenn der reflexive und transitive Abschluß von R die Diamanteneigenschaft hat. Man beweise (informal), daß jede zweistellige Relation R mit der Diamanteneigenschaft konfluent ist.

Aufgabe 19. Wir betrachten (zur Vereinfachung) Herleitungsterme, die nur mit den Regeln für $\to$ aufgebaut sind. Die parallele Reduktion $\to_p$ ist induktiv definiert durch

$$u \to_p u \qquad \frac{M \to_p M'}{\lambda_u M \to_p \lambda_u M'} \qquad \frac{M \to_p M' \qquad N \to_p N'}{MN \to_p M'N'}$$
$$\frac{M(u) \to_p M'(u) \qquad N \to_p N'}{(\lambda_u M(u))N \to_p M'(N')}.$$

Man zeige die Substitutivität von $\to_p$, d.h., daß aus $M(\vec{u}\,) \to_p M'(\vec{u}\,)$ und $\vec{K} \to_p \vec{K}'$ folgt $M(\vec{K}\,) \to_p M'(\vec{K}'\,)$.

Aufgabe 20. Für Herleitungsterme M wie in Aufgabe 19 definieren wir die *vollständige Erweiterung* M^* durch

$$u^* := u, \quad (\lambda_u M)^* := \lambda_u M^*,$$
$$(MN)^* := M^*N^* \quad \text{falls } MN \text{ kein } \beta\text{-Redex ist},$$
$$((\lambda_u M(u))N)^* := M^*(N^*).$$

Man zeige

(a) $M \to_p M'$ impliziert $M' \to_p M^*$.
(b) Der reflexive und transitive Abschluß $\to^*$ der Einschrittreduktion $\to$ ist der reflexive und transitive Abschluß der parallelen Reduktion $\to_p$.
(c) Die Einschrittreduktion $\to$ ist konfluent.

Abgabe. Mittwoch, 25. November 2009, in der Vorlesung.