Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2009/2010
Blatt 4

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 13 (Sprachen der Gruppentheorie)**.** (a) Eine formale Sprache $\mathcal{L}$ sei bestimmt durch ein zweistelliges Funktionssymbol $\circ$ und ein zweistelliges Relationssymbol $=$. Man formalisiere in $\mathcal{L}$: Es gibt ein Element e mit folgenden Eigenschaften: (i) e ist Linkseinheit (d.h., multipliziert man es von links an ein beliebiges Element, so reproduziert sich dieses). (ii) Jedes Element x hat bzgl. e ein Linksinverses, d.h. ein Element y, das von links an x heranmultipliziert e ergibt.

(b) Man kann die in (a) implizit geforderte Existenz durch „Skolemisierung“ explizit machen: $\mathcal{L}'$ sei bestimmt durch die Funktionssymbole e (nullstellig) sowie $\circ$ und g (zweistellig), und ein zweistelliges Relationssymbol $=$, wobei e eine Linkseinheit und $g(x, e)$ ein Linksinverses von x bzgl. e bedeuten sollen. Man formalisiere (i), (ii) aus (a) in $\mathcal{L}'$.

Aufgabe 14. Man zeige

(a) $\vdash (A \mathbin{\tilde{\vee}} B \to C) \to (A \to C) \wedge (B \to C)$,
(b) $\vdash (\neg\neg C \to C) \to (A \to C) \to (B \to C) \to A \mathbin{\tilde{\vee}} B \to C$,
(c) $\vdash (\bot \to B) \to (A \to B \mathbin{\tilde{\vee}} C) \to (A \to B) \mathbin{\tilde{\vee}} (A \to C)$,
(d) $\vdash (A \to B) \mathbin{\tilde{\vee}} (A \to C) \to A \to B \mathbin{\tilde{\vee}} C$.

Aufgabe 15. Man zeige

(a) $\vdash_c A \mathbin{\tilde{\vee}} B \to (A \to C) \to (B \to C) \to C$ für C ohne $\vee, \exists$,
(b) $\vdash_c \tilde{\exists}_x A \to \forall_x (A \to B) \to B$ ($x \notin \mathrm{FV}(B)$, B ohne $\vee, \exists$).

Aufgabe 16. Sei A ein fest gewähltes Aussagensymbol. Für natürliche Zahlen k definieren wir die Formel kA durch $0A := A$, $(k+1)A := (kA \to kA)$. Die *Church-Numerale* $\overline{n}_k$ seien definiert durch

$$\overline{n}_k := \lambda_{v^{kA \to kA}} \lambda_{u^{kA}} (v^n u) \quad \text{mit } v^0 u := u,\ v^{n+1} u := v(v^n u).$$

(a) Man gebe den Herleitungsbaum für $\overline{3}_0$ an.

$\to_\beta$ sei der Abschluß von $\mapsto_\beta$, also definiert durch

(i) Wenn $M \mapsto_\beta M'$, so $M \to_\beta M'$.
(ii) Wenn $M \to_\beta M'$, so $MN \to_\beta M'N$, $NM \to_\beta NM'$, $\lambda_v M \to_\beta \lambda_v M'$.

$=_\beta$ sei die von $\to_\beta$ erzeugte Äquivalenzrelation (also die kleinste Äquivalenzrelation auf Herleitungstermen, die $\to_\beta$ enthält). Man zeige

(b) $\overline{n}_k v(\overline{m}_k vu) =_\beta (\overline{m+n})_k vu$. (Ind. nach n, mit $(\overline{n+1})_k vu =_\beta v(\overline{n}_k vu)$.)
(c) $\overline{n}_k(\overline{m}_k v) =_\beta (\overline{mn})_k v$. (Ind. nach n, mit (b) und $\overline{n}_k v =_\beta \lambda_u(\overline{n}_k vu)$.)
(d) $\overline{m}_{k+1}\overline{n}_k =_\beta (\overline{n^m})_k$ für $m \geq 1$. (Aus (c) durch Induktion nach m.)

Abgabe. Mittwoch, 18. November 2009, in der Vorlesung.