Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2009/2010
Blatt 3

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 9. Für ein zweistelliges Relationssymbol R formalisiere man die folgende Aussage. Ist R symmetrisch und transitiv, so ist R auch reflexiv auf seinem Feld ($:= \{ x \mid \exists_y Rxy \vee \exists_y Ryx \}$).

Aufgabe 10. Man zeige
(a) $\vdash (A \vee B \to C) \leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$,
(b) $\vdash (A \to B \vee C) \leftarrow (A \to B) \vee (A \to C)$,
(c) $\vdash (\exists_x A \to B) \leftrightarrow \forall_x (A \to B)$ falls $x \notin \mathrm{FV}(B)$,
(d) $\vdash (A \to \exists_x B) \leftarrow \exists_x (A \to B)$ falls $x \notin \mathrm{FV}(A)$.
Für die in (d) gefundene Herleitung gebe man einen Herleitungsterm an.

Aufgabe 11. Man zeige

$$\vdash (\neg\neg A \to A) \to (\neg\neg B \to B) \to \neg\neg(A \wedge B) \to A \wedge B.$$

Für die gefundene Herleitung gebe man einen Herleitungsterm an.

Aufgabe 12 (Deduktionstheorem)**.** Im Hilbertkalkül sind nur $\to^-$ und $\forall^+$ als Regeln erlaubt, und als Axiome Generalisierungen folgender Formeln zugelassen:

$$K_{AB} \colon A \to B \to A,$$
$$S_{ABC} \colon (A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C,$$
$$\forall_x A(x) \to A(r),$$
$$\forall_x (A \to B) \to A \to \forall_x B \quad \text{falls } x \text{ nicht frei in } A.$$

Wir schreiben $\Gamma \vdash_H A$ wenn A aus Γ im Hilbertkalkül herleitbar ist. Man zeige: $\Gamma \cup \{A\} \vdash_H B$ impliziert $\Gamma \vdash_H A \to B$. Hinweis: Man verwende Aufgabe 8.

Abgabe. Mittwoch, 11. November 2006, in der Vorlesung.