

### Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

**Aufgabe 5.** Eine Sprache  $\mathcal{L}$  sei gegeben durch eine Konstante 1, zwei 2-stellige Funktionssymbole  $+$  und  $\cdot$ , und zwei 2-stellige Relationssymbole  $<$  und  $=$ . Man gebe Formeln von  $\mathcal{L}$  an, die bei der Standardinterpretation dieser Symbole über den natürlichen Zahlen  $0, 1, 2 \dots$  folgendes ausdrücken.

- (a)  $x$  ist Primzahl.
- (b)  $x$  ist unmittelbarer Nachfolger von  $y$ .
- (c) Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.
- (d)  $x$  ist größter gemeinsamer Teiler von  $y$  und  $z$ .

**Aufgabe 6.** Man leite her

- (a)  $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$ ,
- (b)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$ ,
- (c)  $\neg\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$ ,
- (d)  $(\perp \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow B)$ ,
- (e)  $\neg\neg\forall x A \rightarrow \forall x \neg\neg A$ .

**Aufgabe 7.** Aus den Einführungs- und Beseitigungsregeln für  $\vee$  und  $\exists$  leite man her

- (a)  $A \rightarrow A \vee B$ ,
- (b)  $A \vee B \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$ ,
- (c)  $A \rightarrow \exists_x A$ ,
- (d)  $\exists_x A \rightarrow \forall_x (A \rightarrow B) \rightarrow B$  (falls  $x \notin \text{FV}(B)$ ).

**Aufgabe 8.** Man beweise  $A \rightarrow A$  unter alleiniger Verwendung der  $\rightarrow^-$ -Regel aus geeigneten Instanzen der  $K$ - und  $S$ -Axiome

$$K_{AB}: A \rightarrow B \rightarrow A,$$

$$S_{ABC}: (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C.$$

**Abgabe.** Mittwoch, 4. November 2009, in der Vorlesung.