Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2009/2010
Blatt 1

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 1. Man formalisiere folgende Aussagen ($\forall_x$: für alle Mengen x; $x \in y$: x ist Element von y; $x = y$: x ist gleich y).

(a) Es gibt eine Menge ohne Elemente.
(b) Zu je zwei Mengen x_1, x_2 gibt es eine Menge x, deren Elemente genau x_1 und x_2 sind.
(c) Zu jeder Menge x gibt es eine Menge y, die aus den Elementen aller Elemente von x besteht.
(d) Zu jeder Menge x gibt es eine Menge y, deren Elemente genau die Teilmengen von x sind.

Aufgabe 2. Die *Höhe* $|A|$ einer Formel A ist definiert durch $|P| = 0$ für atomare P, $|A \circ B| = \max(|A|, |B|) + 1$ für binäre Operatoren $\circ$ (also $\to, \wedge, \vee$) und $|\circ A| = |A| + 1$ für einstellige Operatoren $\circ$ (also $\forall_x$, $\exists_x$). Die *Länge* $\|A\|$ einer Formel A ist definiert durch $\|P\| = 1$ für atomare P, $\|A \circ B\| = \|A\| + \|B\|$ für binäres $\circ$ und $\|\circ A\| = \|A\| + 1$ für einstelliges $\circ$. Man zeige $\|A\| + 1 \leq 2^{|A|+1}$.

Aufgabe 3. Man gebe Herleitungen der folgenden Formeln an:

(a) $A \to B \to A$,
(b) $(A \to B \to C) \to B \to A \to C$,
(c) $\forall_x \forall_y A \to \forall_y \forall_x A$,
(d) $\forall_x \forall_y A(x, y) \to \forall_x A(x, x)$.

Aufgabe 4 (Polnische Schreibweise)**.** *Klammerfreie Terme* seien wie folgt definiert: Ist f ein k-stelliges Funktionssymbol ($k \geq 0$) und sind $t_1, \dots, t_k$ klammerfreie Terme, so auch $f t_1 \dots t_k$. Wir verwenden u, v, w als Mitteilungszeichen für Zeichenreihen, und schreiben $u \prec v$ wenn u ein (nicht notwendig echtes) Anfangsstück von v ist.

Man zeige: Gilt $u \prec w$ und $v \prec w$ und sind u, v klammerfreie Terme, so folgt $u = v$.

Abgabe. Mittwoch, 28. Oktober 2009, in der Vorlesung.