

Übungen zur Vorlesung „Logik II: Beweise und Programme“

Aufgabe 40. (4 Punkte) Beweisen Sie, daß $z \text{ r } (A \wedge B)$ äquivalent ist zu

- (a) $z \equiv \langle \text{lft}(z), \text{rht}(z) \rangle \wedge (\text{lft}(z) \text{ r } A) \wedge (\text{rht}(z) \text{ r } B)$ falls A c.r. und B c.r.,
- (b) $(z \text{ r } A) \wedge B$ falls A c.r. und B n.c.

Die folgenden Aufgaben befassen sich mit der Definition der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl $a := \frac{p}{q}$ als reelle Zahl, d.h. als Cauchyfolge rationaler Zahlen mit Modul. Genauer geht es darum, den Rest von Aufgabe 31 in Minlog zu beweisen. Wir schreiben a_n für $\text{RatSqrtR}_{p,q}(n)$ und $b_n := \frac{a}{a_n}$ für $\text{RatSqrtL}_{p,q}(n)$.

Aufgabe 41. (4 Punkte) Beweisen Sie in Minlog

- (1) $\text{RatSqrtRDecr} : \forall_{m,n,p,q} (m \leq n \rightarrow a_{n+1} \leq a_{m+1}),$
- (2) $\text{RatLtZeroSqrtL} : \forall_{p,q,n} (0 < b_n),$
- (3) $\text{RatSqrtLApproxUb} : \forall_{p,q,n} (b_{n+1}^2 \leq a).$

Aufgabe 42. (4 Punkte) Beweisen Sie in Minlog

- (4) $\text{RatSqrtLIncrSucc} : \forall_{p,q,n} (b_{n+1} \leq b_{n+2}),$
- (5) $\text{RatSqrtLIncr} : \forall_{m,n,p,q} (m \leq n \rightarrow b_{m+1} \leq b_{n+1}),$
- (6) $\text{RatSqrtLeLR} : \forall_{p,q,n} (b_{n+1} \leq a_{n+1}).$

Aufgabe 43. (4 Punkte) Beweisen Sie in Minlog

- (7) $\text{RatSqrtRLDiff} : \forall_{p,q,n} \left(a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{1}{2^n} (a_1 - b_1) \right),$

and finally $\text{RatSqrtRModul} :$

- (8) $\forall_{p,q,l} \left(a_1 - b_1 \leq 2^l \rightarrow \forall_{r,m,n} (r+l \leq m \rightarrow m \leq n \rightarrow a_{m+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2^r}) \right).$

Abgabe. Mittwoch, 8. Juli 2026, 08:00. Eine Lösungshilfe für die Minlog-Aufgaben finden Sie in `ratsqrt.scm` auf der Vorlesungsseite. Die Lösungen für die Aufgaben 41-43 als `scm`-Datei und für den Rest als `pdf`-Datei bitte abgeben über Uni2work.