

Übungen zur Vorlesung „Logik II: Beweise und Programme“

Aufgabe 32. (4 Punkte) Beweisen Sie informal, daß induktive und coinduktive Prädikate in ihrer Dualisierung enthalten sind, also

- (a) $I \subseteq {}^{\text{co}}I$,
- (b) $I^{\text{nc}} \subseteq {}^{\text{co}}I^{\text{nc}}$.

Aufgabe 33. (4 Punkte) Beweisen Sie informal, daß induktive und coinduktive Prädikate in ihren nicht-rechnerischen Versionen enthalten sind, also

- (a) $I \subseteq I^{\text{nc}}$,
- (b) ${}^{\text{co}}I \subseteq {}^{\text{co}}I^{\text{nc}}$.

Aufgabe 34. (4 Punkte) Es sei C ein Prädikat oder eine Formel. Beweisen Sie informal in TCF

$$\begin{cases} \forall_{\vec{x}}(\mathbf{F} \rightarrow P\vec{x}) & \text{falls } C \text{ ein Prädikat } P \text{ ist} \\ \mathbf{F} \rightarrow A & \text{falls } C \text{ eine Formel } A \text{ ist} \end{cases}$$

aus Annahmen

$$\begin{cases} \forall_{\vec{x}}(\mathbf{F} \rightarrow Y\vec{x}) & \text{falls } Y \text{ eine in } C \text{ strikt positive Prädikatenvariable ist} \\ \forall_{\vec{x}}(\mathbf{F} \rightarrow I\vec{x}) & \text{falls } I \text{ keine nicht-rekursive Klausel hat und} \\ & \text{in } C \text{ strikt positiv vorkommt.} \end{cases}$$

Aufgabe 35. (4 Punkte) Rationale Zahlen heißen *dyadisch* wenn der Nenner eine Zweierpotenz ist. Sie sind abgeschlossen unter $+$, $*$, $-$ und Division durch 2. Etwa $\frac{1}{3}$ kann als Limes dargestellt werden.

Dyadische rationale Zahl genügen für die Approximation reeller Zahlen. Sie passen gut zu (binären) positiven Zahlen und ihren Konstruktoren S_0 und S_1 . Jede dyadische rationale Zahl hat eine eindeutige Normalform (**DyNf**) in der kein Faktor 2 gekürzt werden kann. Die Eigenschaften von **RatMax** und **RatLe** werden klarer auf **DyNf**. Etwa **RatMax** hat eine unsymmetrische Definition: man hat $b \leq a \rightarrow a \max b = a$ aber $a \leq b \rightarrow a \max b =_{\mathbb{Q}} b$. Auf **DyNf** entfällt dieses Problem.

- (a) Definieren Sie in Minlog **RatNum**, **RatDen**, **Dy**, **IsTwoExp** und **DyNf** durch Berechnungsregeln und beweisen Sie jeweils die Totalität.
- (b) Beweisen Sie in Minlog $\text{Dy}(\frac{k}{p}) \rightarrow p = 2^{\log p}$ und $\text{DyNf}(a) \rightarrow \text{Dy}(a)$.

Abgabe. Mittwoch, 24. Juni 2026, 08:00. Eine Lösungshilfe für die Minlog-Aufgaben finden Sie in **dy.scm** auf der Vorlesungsseite. Die Lösungen für Aufgabe 35 als **scm**-Datei und für den Rest als **pdf**-Datei bitte abgeben über Uni2work.