

Übungen zur Vorlesung „Logik II: Beweise und Programme“

Aufgabe 29. (4 Punkte) Formulieren Sie die Einführungsaxiome und das Beseitigungsaxiom für $\exists^d$, $\vee^d$ und $\wedge^d$.

Aufgabe 30. (2 Punkte) Es sei $\text{Sd} := \{1, 0, -1\}$ und I ein einstelliges Prädikat über reellen Zahlen, das induktiv definiert ist durch die Klausel

$$\forall_{d,x,x'} \left(d \in \text{Sd} \rightarrow x' \in I \rightarrow x = \frac{x' + d}{2} \rightarrow x \in I \right).$$

Hier läuft x über reelle Zahlen und d über ganze Zahlen. Sd ist ein (formal induktives) Prädikat das ausdrückt, daß die ganze Zahl d eine Ziffer mit Vorzeichen ist, also $|d| \leq 1$. Formulieren Sie das Abschlußaxiom ${}^{\text{co}}I^-$ und das Axiom vom größten Fixpunkt ${}^{\text{co}}I^+$ (Coinduktion).

Aufgabe 31. (5 Punkte) Es sei a eine positive rationale Zahl, also von der Form $\frac{p}{q}$. Mit dem Heron-Verfahren kann man $\sqrt{a}$ von oben und unten durch rationale Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ approximieren. Es sei a_0 eine positive rationale Zahl, also von der Form $\frac{p_0}{q_0}$, und

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right).$$

Offenbar ist $0 < a_n$ für alle n . Beweisen Sie informal

- (a) $a \leq a_{n+1}^2$ für alle n .
- (b) $a_{n+2} \leq a_{n+1}$ für alle n .

Es sei noch $b_n := \frac{a}{a_n}$. Beweisen Sie informal

- (c) $b_{n+1}^2 \leq a$ für alle n .
- (d) $b_{n+1} \leq b_{n+2}$ für alle n .
- (e) $b_{n+1} \leq a_{m+1}$ für alle n, m .
- (f) $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{1}{2^n} (a_1 - b_1)$ für alle n .

Aufgabe 32. (5 Punkte) Formalisieren Sie Aufgabe 31 (a) in Minlog.

Abgabe. Mittwoch, 17. Juni 2026, 08:00. Eine Lösungshilfe für die Minlog-Aufgabe finden Sie in heron.scm auf der Vorlesungsseite. Die Lösungen für die Aufgaben 29-31 als pdf-Datei und für 32 als scm-Datei bitte abgeben über Uni2work.