

Übungen zur Vorlesung „Logik II: Beweise und Programme“

Aufgabe 21. (4 Punkte) Es seien $\mathbb{B}$ und $\mathbb{Y}$ wie in der Vorlesung definiert, und $\mathbb{S}_{\mathbb{B}}$ durch den Konstruktor $S: \mathbb{B} \rightarrow \xi \rightarrow \xi$. Geben Sie eine approximierbare Abbildung r von $\mathbf{A}_{\iota_{\mathbb{S}_{\mathbb{B}}}}$ nach $\mathbf{A}_{\iota_{\mathbb{Y}}}$ an und zeigen Sie, daß die zugehörige (Scott-) stetige Funktion $|r|: |\mathbf{A}_{\iota_{\mathbb{S}_{\mathbb{B}}}}| \rightarrow |\mathbf{A}_{\iota_{\mathbb{Y}}}|$ auf den nicht-leeren Idealen injektiv ist.

Aufgabe 22. (4 Punkte) Formulieren Sie die Berechnungsregeln zu $\mathcal{R}_{\iota}^{\tau}$ für $\iota = \mathbb{P}, \mathbb{Y}, \mathbb{L}(\rho), \rho + \sigma, \rho \times \sigma$.

Aufgabe 23. (4 Punkte)

- (a) In Abschnitt 2.3.3 der Vorlesung waren Destruktoren $\mathcal{D}_{\iota}$ für Grundtypen ι definiert. Geben Sie für $\mathcal{D}_{\mathbb{S}(\alpha)}$ die Berechnungsregeln an.
- (b) Gegeben sei $h: \tau \rightarrow \sigma$. Definieren Sie eine Funktion $\text{Map}_g: \mathbb{L}(\tau) \rightarrow \mathbb{L}(\sigma)$, die h auf alle Elemente einer Liste vom Typ $\mathbb{L}(\tau)$ anwendet, durch (i) Berechnungsregeln und (ii) durch Verwendung von $\mathcal{R}_{\mathbb{L}(\tau)}^{\mathbb{L}(\sigma)}$.
- (c) Gegeben sei $h: \tau \rightarrow \sigma$. Definieren Sie eine Funktion $\text{Map}_h: \mathbb{S}(\tau) \rightarrow \mathbb{S}(\sigma)$, die h auf alle Elemente eines Stroms vom Typ $\mathbb{S}(\tau)$ anwendet, durch (i) Berechnungsregeln und (ii) durch Verwendung von ${}^{\text{co}}\mathcal{R}_{\mathbb{S}(\tau)}^{\mathbb{S}(\sigma)}$.

Aufgabe 24. (6 Punkte) Die Irrationalität von $\sqrt{2}$ läßt sich formulieren als $\forall_{n,m} (n^2 = 2m^2 \rightarrow n = 0)$. Beweisen Sie diese Aussage

- (a) informal (durch Wertverlaufsinduktion über n),
- (b) formal in Minlog (durch Verwendung von `(gind [n]n)`).

Die allgemeine Induktion `gind` ist im Referenzmanual beschrieben durch

`(gind h)` expects a goal $\forall_{\vec{x}} A(\vec{x})$ with $\vec{x}$ total. It generates a new goal $\text{Prog}_h \{ \vec{x} \mid A(\vec{x}) \}$ where h is a term of type $\vec{\rho} \rightarrow \mathbb{N}$, x_i has type ρ_i and

$$\text{Prog}_h \{ \vec{x} \mid A(\vec{x}) \} := \forall_{\vec{x}} (\forall_{\vec{y}} (h\vec{y} < h\vec{x} \rightarrow A(\vec{y})) \rightarrow A(\vec{x})).$$

Abgabe. Mittwoch, 27. Mai 2026, 08:00. Eine Lösungshilfe für die Minlog-Aufgabe finden Sie in `sqrtwo.scm` auf der Vorlesungsseite. Die Lösung für Aufgabe 24(b) als `scm`-Datei und für den Rest als `pdf`-Datei bitte abgeben über Uni2work.