

Übungen zur Vorlesung „Logik II: Beweise und Programme“

Aufgabe 9. (4 Punkte) Ein Informationssystem $\mathbf{A} = (A, \text{Con}, \vdash)$ heißt kohärent wenn gilt: $U \subseteq A$ ist konsistent genau dann, wenn alle seine 2-elementigen Teilmengen es sind. Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Informationssysteme. Beweisen Sie: Ist $\mathbf{B}$ kohärent, so auch $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$.

Aufgabe 10. (4 Punkte) Es seien $\mathbf{A} = (A, \text{Con}_A, \vdash_A)$, $\mathbf{B} = (B, \text{Con}_B, \vdash_B)$ und $\mathbf{C} = (C, \text{Con}_C, \vdash_C)$ Informationssysteme. Beweisen Sie, daß für approximierbare Abbildungen $r \subseteq \text{Con}_A \times B$ und $s \subseteq \text{Con}_B \times C$ folgendes gilt.

- (a) $s \circ r := \{ (U, c) \mid \exists_V ((V, c) \in s \wedge (U, V) \subseteq r) \}$ ist eine approximierbare Abbildung (wobei $(U, V) := \{ (U, b) \mid b \in V \}$), und
- (b) $|s \circ r| = |s| \circ |r|$.

Aufgabe 11. (4 Punkte) Formeln seien aus atomaren Formeln aufgebaut mit $\rightarrow$ und $\forall$. Die Negation einer Formel A ist definiert durch

$$\neg A := (A \rightarrow \perp)$$

wobei $\perp$ eine fest gewählte Aussagenvariable ist. Stab sei die Menge aller Formeln der Gestalt

$$\forall \vec{x} (\neg \neg R \vec{x} \rightarrow R \vec{x})$$

mit R Relationssymbol verschieden von $\perp$. Klassische Herleitbarkeit $\vdash_c$ wird definiert durch

$$\Gamma \vdash_c B \text{ genau dann wenn } \Gamma \cup \text{Stab} \vdash B.$$

Beweisen Sie

- (a) $\vdash (\neg \neg B \rightarrow B) \rightarrow \neg \neg (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow B$.
- (b) $\vdash (\neg \neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg \neg \forall_x A \rightarrow A$.
- (c) $\vdash_c \neg \neg A \rightarrow A$ für alle Formeln A .

Aufgabe 12. (4 Punkte) Beweisen Sie in Minlog die Eindeutigkeit der Division mit Rest:

$$q * m + r = q_0 * m + r_0 \rightarrow r < m \rightarrow r_0 < m \rightarrow q = q_0 \text{ and } r = r_0$$

Abgabe. Mittwoch, 6. Mai 2026, 08:00. Eine Lösungshilfe für die Minlog-Aufgabe finden Sie in `quotremuniq.scm` auf der Vorlesungsseite. Die Lösung für Aufgabe 12 als `scm`-Datei und für den Rest als `pdf`-Datei bitte abgeben über Uni2work.