

## Übungen zur Vorlesung „Logik II: Beweise und Programme“

**Aufgabe 37.** (4 Punkte) Beweisen Sie, daß  $z \mathbf{r} (A \wedge B)$  äquivalent ist zu

- (a)  $z \equiv \langle \text{lft}(z), \text{rht}(z) \rangle \wedge (\text{lft}(z) \mathbf{r} A) \wedge (\text{rht}(z) \mathbf{r} B)$  falls  $A$  c.r. und  $B$  c.r.,
- (b)  $(z \mathbf{r} A) \wedge B$  falls  $A$  c.r. und  $B$  n.c.

**Aufgabe 38.** (4 Punkte) Wir betrachten das induktive Prädikat  $I := \sim_{\mathbb{L}}$  mit  $\mathbb{L}$  die Algebra der Listen von Ziffern mit Vorzeichen. Beweisen Sie, daß der extrahierte Term von  $I^{\pm}$  das jeweilige Axiom realisiert, also

- (a) die Konstruktoren von  $\mathbb{L}$  realisieren die Klauseln von  $\sim_{\mathbb{L}}$ .
- (b) Der Rekursionsoperator  $\mathcal{R}_{\mathbb{L}}^{\alpha}: \mathbb{L} \rightarrow \alpha \rightarrow (\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{L} \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$  realisiert das Axiom vom kleinsten Fixpunkt  $\sim_{\mathbb{L}}^{-}$ :

$$\begin{aligned} & \forall_{\ell_1, \ell_2} (\ell_1 \sim_{\mathbb{L}} \ell_2 \rightarrow \\ & \quad X [] [] \rightarrow \\ & \quad \forall_{s_1, s_2, \ell_1, \ell_2} (s_1 \sim_{\mathbb{D}} s_2 \rightarrow \ell_1 \sim_{\mathbb{L}} \ell_2 \rightarrow X \ell_1 \ell_2 \rightarrow X (s_1 :: \ell_1, s_2 :: \ell_2)) \rightarrow \\ & \quad X \ell_1 \ell_2) \end{aligned}$$

**Aufgabe 39.** (4 Punkte) Für  $p \in \mathbb{P}$  sei  $\log(p) \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Ziffern von  $p$  ohne die führende Ziffer 1.

- (a) Definieren Sie den Logarithmus  $\log(p)$  von  $p$  durch Berechnungsregeln.
- (b) Beweisen Sie informal  $\forall_{p, q} (p \leq q \rightarrow \log(p) \leq \log(q))$ .
- (c) Definieren Sie den größten gemeinsamen Teiler  $\text{gcd}(p, q)$  von  $p$  und  $q$  durch Berechnungsregeln.
- (d) Beweisen Sie informal die Totalität von  $\text{gcd}$ . (Hinweis. Induktion über  $\log(p) + \log(q)$ ).

**Aufgabe 40.** (4 Punkte) Formalisieren Sie die Teile (b)-(d) von Aufgabe 39 in Minlog. (Hinweis. Für (d) ist `BooleIfTotal` hilfreich.)

**Abgabe.** Mittwoch, 9. Juli 2025, 8:00. Eine Lösungshilfe für die Minlog-Aufgabe finden Sie in `posgcd.scm` auf der Vorlesungsseite. Die Lösungen für die Aufgaben 37-39 als `pdf`-Datei und für 40 als `scm`-Datei bitte abgeben über Uni2work.