Mathematisches Institut der LMU
Helmut Schwichtenberg
Valentin Herrmann

Sommersemester 2025
ueb08

Übungen zur Vorlesung „Logik II: Beweise und Programme“

Aufgabe 29. (4 Punkte) Es sei $I := \mu_X(\forall_{\vec{x}_i}((A_{i\nu}(X))_{\nu<n_i} \to X\vec{t}_i))_{i<k}$ ein induktives Prädikat und I^{nc} seine nicht-rechnerische Variante.

(a) Beweisen Sie $I \subseteq {}^{\mathrm{co}}I$, $I^{\mathrm{nc}} \subseteq {}^{\mathrm{co}}I^{\mathrm{nc}}$.
(b) Beweisen Sie $I \subseteq I^{\mathrm{nc}}$, ${}^{\mathrm{co}}I \subseteq {}^{\mathrm{co}}I^{\mathrm{nc}}$.

Aufgabe 30. (4 Punkte) Es sei C ein Prädikat oder eine Formel. Zeigen Sie, daß man in TCF aus Annahmen

$$\begin{cases} \forall_{\vec{x}}(\mathbf{F} \to Y\vec{x}\,) & \text{falls } Y \text{ eine in } C \text{ strikt positive Prädikatenvariable ist} \\ \forall_{\vec{x}}(\mathbf{F} \to I\vec{x}\,) & \text{falls } I \text{ eine nicht-rekursive Klausel hat mit } C \text{ nur s.p.} \end{cases}$$

beweisen kann

$$\begin{cases} \forall_{\vec{x}}(\mathbf{F} \to P\vec{x}\,) & \text{falls } C \text{ ein Prädikat } P \text{ ist,} \\ \mathbf{F} \to A & \text{falls } C \text{ eine Formel } A \text{ ist.} \end{cases}$$

Aufgabe 31. (4 Punkte) Wir definieren f, g vom Typ $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch die Berechnungsregeln $fn = 0$ und $g0 = 0$, $g(Sn) = gn$. Die Konstante $\bot_{\mathbb{N}}$ hat keine Berechnungsregeln.

(a) Folgern Sie $f\bot_{\mathbb{N}} = 0$.
(b) Folgern Sie, daß $[\![g\bot_{\mathbb{N}}]\!]$ das leere Ideal $[\![\bot_{\mathbb{N}}]\!]$ ist.
(c) Folgern Sie, daß $f \doteq g$, d.h., $\forall_{n,m}(n \doteq_{\mathbb{N}} m \to fn \doteq_{\mathbb{N}} gm)$. Hinweis. $n \doteq_{\mathbb{N}} m$ impliziert $n \in T_{\mathbb{N}}$ und $n \equiv m$.
(d) Folgern Sie, daß das durch $Fh = h\bot_{\mathbb{N}}$ definierte Funktional F die punktweise gleichen Funktionen f, g auf verschiedene Werte abbildet.

Aufgabe 32. (4 Punkte) Es sei I das in der Vorlesung durch die Klausel

$$\forall_{d,x',x}(d \in \mathbb{D} \land x' \in \mathbb{R} \land |x'| \leq_{\mathbb{R}} 1 \land x' \in I \land x =_{\mathbb{R}} \frac{x'+d}{2} \to x \in I)$$

definierte induktive Prädikat. $\mathbb{R}$ sind die reellen Zahlen mit den Relationen $=_{\mathbb{R}}$ und $\leq_{\mathbb{R}}$. $\mathbb{D}$ ist der Grundtyp der Ziffern mit Vorzeichen $\{-1, 0, 1\}$. Beweisen Sie in Minlog aus $({}^{\mathrm{co}}I)^{+}$ die iterative Variante

```
allnc x((Pvar rea)x -> exr d,x0(Sd d andd Real x0 andr
   abs x0<<=1 andr (Pvar rea)x0 andl x===(1#2)*(x0+d))) ->
allnc x((Pvar rea)x -> CoI x)
```

Abgabe. Mittwoch, 25. Juni 2025, 8:00. Eine Lösungshilfe für die Minlog-Aufgabe finden Sie in coigfpiter.scm auf der Vorlesungsseite. Die Lösungen für die Minlog-Aufgabe als `scm`-Datei und für die anderen Aufgaben als `pdf`-Datei bitte abgeben über Uni2work.