Mathematisches Institut der LMU
Helmut Schwichtenberg
Valentin Herrmann

Sommersemester 2025
ueb07

Übungen zur Vorlesung „Logik II: Beweise und Programme“

Aufgabe 25. (4 Punkte) Die Leibniz-Gleichheit $\equiv$ ist definiert durch

$$(\mathrm{EqD})_0^+ \colon \forall_{\hat{x}}(\hat{x} \equiv \hat{x}),$$
$$(\mathrm{EqD})^- \colon \forall_{\hat{x}} X\hat{x}\hat{x} \to \forall_{\hat{x},\hat{y}}(\hat{x} \equiv \hat{y} \to X\hat{x}\hat{y}).$$

(a) Beweisen Sie $\forall_{\hat{x},\hat{y}}(\hat{x} \equiv \hat{y} \to A(\hat{x}) \to A(\hat{y}))$.
(b) Beweisen Sie Symmetrie und Transitivität von $\equiv$.

Die Falschheit $\mathbf{F}$ ist definiert durch $\mathbf{F} := (\mathtt{ff} \equiv \mathtt{tt})$ und die Negation $\neg A$ einer Formel A durch $\neg A := (A \to \mathbf{F})$.

(c) Beweisen Sie $\mathbf{F} \to \forall_{\hat{x},\hat{y}}(\hat{x} \equiv \hat{y})$. Hinweis. Verwenden Sie (a) und $\mathcal{R}_{\mathbb{B}}^{\tau}$.
(d) Beweisen Sie $\mathbf{F} \to \forall_{\hat{n}}(\hat{n} \in T_{\mathbb{N}})$. Hinweis. Verwenden Sie (c).

Aufgabe 26. (4 Punkte) Die Funktion $\mathrm{Fib} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei definiert durch

$$\mathrm{Fib}(0) = 0,$$
$$\mathrm{Fib}(1) = 1,$$
$$\mathrm{Fib}(S(Sn)) = \mathrm{Fib}(Sn) + \mathrm{Fib}(n).$$

Ferner sei $L \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^3$ (mit $\mathbb{N}^3 := \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$) definiert durch

$$L(0) = (1, 0, 1),$$
$$L(Sn) = \mathrm{Next}(Ln)$$

wobei $\mathrm{Next} \colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^3$ definiert ist durch

$$\mathrm{Next}(n_1, n_2, n_3) = (n_1 + n_2, n_2 + n_3, n_2).$$

(a) Beweisen Sie die Totalität von Fib, also $\forall_{\hat{n}}(T_{\mathbb{N}}(\hat{n}) \to T_{\mathbb{N}}(\mathrm{Fib}(\hat{n})))$.
(b) Beweisen Sie $L(n+1) = (a_{n+2}, a_{n+1}, a_n)$ mit $a_n := \mathrm{Fib}(n)$.

Aufgabe 27. (4 Punkte) Formalisieren Sie Aufgabe 26 in Minlog.

Aufgabe 28. (4 Punkte) Definieren Sie ein Funktional `Fz`: $(\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{N}$ (first zero), das jeder Funktion $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ das kleinste n mit $g(n) = \mathtt{tt}$ zuordnet falls ein solches n existiert, und zwar

(a) durch eine Berechnungsregel, und
(b) unter Verwendung von ${}^{\mathrm{co}}\mathcal{R}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N} \to \mathbb{B}}$.

Hinweis zu (a). Ein „rekursiver“ Ansatz kann helfen.

Abgabe. Mittwoch, 18. Juni 2025, 8:00. Eine Lösungshilfe für die Minlog-Aufgabe finden Sie in fib.scm auf der Vorlesungsseite. Die Lösungen bitte als `pdf`- bzw. `scm`-Dateien abgeben über Uni2work.