

## Übungen zur Vorlesung „Logik II: Beweise und Programme“

**Aufgabe 21.** (4 Punkte) Definieren Sie durch Berechnungsregeln

- (a)  $=_{\mathbb{P}}: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}$ ,
- (b) eine Funktion, die jeder positiven Zahl die entsprechende natürliche Zahl zuordnet (unter Verwendung vom Double:  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ), und
- (c) den Nachfolger sowie Addition und Multiplikation für positive Zahlen.

**Aufgabe 22.** (4 Punkte) Formulieren Sie die Berechnungsregeln zu  $\mathcal{R}_\iota^\tau$  für  $\iota = \mathbb{P}, \mathbb{Y}, \mathbb{L}(\rho), \rho + \sigma, \rho \times \sigma$ .

**Aufgabe 23.** (4 Punkte)

- (a) In Abschnitt 2.3.3 der Vorlesung waren Destruktoren  $\mathcal{D}_\iota$  für Grundtypen  $\iota$  definiert. Geben Sie für  $\mathcal{D}_{\mathbb{S}(\alpha)}$  die Berechnungsregeln an.
- (b) Gegeben sei  $g: \rho \rightarrow \sigma$ . Definieren Sie eine Funktion  $\text{Map}_g: \mathbb{L}(\rho) \rightarrow \mathbb{L}(\sigma)$ , die  $g$  auf alle Elemente einer Liste vom Typ  $\mathbb{L}(\rho)$  anwendet, durch (i) Berechnungsregeln und (ii) durch Verwendung von  $\mathcal{R}_{\mathbb{L}(\rho)}^{\mathbb{L}(\sigma)}$ .
- (c) Gegeben sei  $h: \sigma \rightarrow \rho$ . Definieren Sie eine Funktion  $\text{Map}_h: \mathbb{S}(\sigma) \rightarrow \mathbb{S}(\rho)$ , die  $h$  auf alle Elemente eines Stroms vom Typ  $\mathbb{S}(\sigma)$  anwendet, durch (i) Berechnungsregeln und (ii) durch Verwendung von  ${}^{\text{co}}\mathcal{R}_{\mathbb{S}(\rho)}^{\mathbb{S}(\sigma)}$ .

**Aufgabe 24.** (4 Punkte)

- (a) Definieren Sie eine Funktion  $\text{Leafs}: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{N}$ , die jedem binären Baum die Anzahl seiner Blätter zuordnet, (i) durch Berechnungsregeln (unter Verwendung vom NatPlus:  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ) und (ii) mittels  $\mathcal{R}_{\mathbb{Y}}^{\mathbb{N}}$ .
- (b) Formalisieren Sie in Minlog Totalitätsbeweise für die durch Berechnungsregeln definierte Funktion  $\text{Leafs}: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{N}$ , und zwar (i) mit dem Eliminationsaxiom und (ii) mit `fold-alltotal` und Induktion.

**Abgabe.** Mittwoch, 11. Juni 2025, 8:00. Eine Lösungshilfe für die Minlog-Aufgabe ist `leafstotal.scm` auf der Vorlesungsseite. Die Lösungen bitte als pdf- bzw. scm-Dateien abgeben über Uni2work.