Mathematisches Institut der LMU
Helmut Schwichtenberg
Valentin Herrmann

Sommersemester 2025
ueb03

## Übungen zur Vorlesung „Logik II: Beweise und Programme“

**Aufgabe 9.** (4 Punkte) Es sei `NatQR` definiert durch

```
(add-program-constant "NatQR" (py "nat=>nat=>nat yprod nat"))
(add-computation-rules
 "NatQR 0 m" "0 pair 0"
 "NatQR(Succ n)m"
 "([nm][if (Succ rht nm<m)
           (lft nm pair Succ rht nm)
           (Succ lft nm pair 0)])
  (NatQR n m)")
```

Beweisen Sie in Minlog

(a) die Totalität von `NatQR`,

(b) die Eindeutigkeit der Division mit Rest:

```
all n,m,l,n0,l0(
  n*m+l=n0*m+l0 -> l<m -> l0<m -> n=n0 andb l=l0)
```

**Aufgabe 10.** (4 Punkte) Beweisen Sie, daß für approximierbare Abbildungen $r$ und $s$ und für stetige Funktionen $f$ und $g$ folgendes gilt.

(a) $s \circ r := \{\, (U, c) \mid \exists_V ((V, c) \in s \wedge (U, V) \subseteq r) \,\}$ ist eine approximierbare Abbildung (wobei $(U, V) := \{\, (U, b) \mid b \in V \,\}$), und

(b) $|s \circ r| = |s| \circ |r|, \quad \widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$.

**Aufgabe 11.** (4 Punkte)

(a) Formulieren Sie für den Grundtyp $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen die Klauseln $(T_\mathbb{N})^+_i$ $(i = 0, 1)$ und die Eigenschaft vom kleinsten Fixpunkt $(T_\mathbb{N})^+_0$.

(b) Formulieren Sie die Abschluß-Eigenschaft ${}^{\mathrm{co}}T^-_\mathbb{N}$ und die Eigenschaft vom größten Fixpunkt ${}^{\mathrm{co}}T^+_\mathbb{N}$.

(c) Beweisen Sie $T_\mathbb{N} \subseteq {}^{\mathrm{co}}T_\mathbb{N}$.

**Aufgabe 12.** (4 Punkte) Der Grundtyp $\iota_k$ sei gegeben durch den Konstruktor $\mathrm{C}_k \colon (\xi)_{i<k} \to \xi$.

(a) Beweisen Sie, daß alle nicht-leeren cototalen Ideale $x \in |\boldsymbol{A}_{\iota_1}|$ unendlich sind.

(b) Angenommen alle Ideale in $x \in |\boldsymbol{A}_{\iota_k}|$ sind endlich. Beweisen Sie, daß dann der Grundtyp $\iota_k$ nicht rekursiv ist, also $k = 0$.

**Abgabe.** Mittwoch, 21. Mai 2025, 8:00. Eine Lösungshilfe für die Minlog-Aufgabe ist quotremuniq.scm auf der Vorlesungsseite. Die Lösungen für die Aufgaben 10-12 als `pdf`-Datei und für 9 als `scm`-Datei bitte abgeben über Uni2work.