

Übungen zur Vorlesung „Logik II: Beweise und Programme“

Aufgabe 1. (4 Punkte) Es seien $A, B, \perp$ Aussagenvariablen.

(a) Beweisen Sie die Peirce-Formel

$$(((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow A) \rightarrow (\perp \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

(b) Formalisieren Sie den Beweis in Minlog (s. `peirce.scm`).

Aufgabe 2. (4 Punkte) Es seien A, B, C Aussagenvariablen.

(a) Beweisen Sie aus Annahmen der Form

$$\text{OrD}_0^+ : A \rightarrow A \vee B,$$

$$\text{OrD}_1^+ : B \rightarrow A \vee B,$$

$$\text{OrD}^- : A \vee B \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$$

daß $\vee$ kommutativ und assoziativ ist.

(b) Formalisieren Sie die Beweise in Minlog (s. `disj.scm`).

Aufgabe 3. (4 Punkte) Es sei R eine zweistellige Relation. Das *Feld* von R sei die Menge aller x für die es ein y gibt mit Rxy oder Ryx .

(a) Beweisen Sie, daß jede symmetrische und transitive Relation auf ihrem Feld reflexiv ist, also

$$\forall_{x,y}(Rxy \rightarrow Ryx) \rightarrow \forall_{x,y,z}(Rxy \rightarrow Ryz \rightarrow Rxz) \rightarrow \forall_{x,y}(Rxy \rightarrow Rxx)$$

(b) Formalisieren Sie den Beweis in Minlog (s. `refl.scm`).

(c) Verwenden Sie (`search`) zur Suche nach einem Beweis.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Es sei $\mathbf{A} = (A, \text{Con}, \vdash)$ ein Informationssystem. Für jedes $U \in \text{Con}$ definieren wir $\mathcal{O}_U \subseteq |\mathbf{A}|$ durch

$$\mathcal{O}_U := \{ x \in |\mathbf{A}| \mid U \subseteq x \}.$$

Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{B} := \{ \mathcal{O}_U \mid U \in \text{Con} \}$$

Basis einer Topologie auf $|\mathbf{A}|$ ist, d.h., daß es für beliebige $U, V \in \text{Con}$ und $x \in \mathcal{O}_U \cap \mathcal{O}_V$ ein $W \in \text{Con}$ gibt mit $x \in \mathcal{O}_W \subseteq \mathcal{O}_U \cap \mathcal{O}_V$.

Abgabe. Mittwoch, 7. Mai 2025, 10:00. Für die Minlog-Aufgaben finden Sie Lösungshilfen in `ueb00.scm` (allgemeine Einführung) und in `peirce.scm` `disj.scm` `refl.scm` (speziell für dieses Blatt) auf der Vorlesungsseite.

Die Lösungen für die Aufgaben 1b, 2b, 3bc als `scm`-Datei und für den Rest als `pdf`-Datei bitte abgeben über Uni2work.